《北大清华自主招生数学试题的分析与解》勘误

兰琦

2019 年 1 月 15 日

第 1 节　第 1 次印刷

1. 第 2 页，2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 8 分析第 1 行

   与向量 $(2,1)$ 的数量积　　修改为　　与向量 $(2,-1)$ 的数量积

2. 第 4 页，2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 12 分析倒数第 3 行

   $4+4(a+b)^2 \leqslant 4+8(a^2+b^2)$　　修改为　　$4+4(a+b)^2 < 4+8(a^2+b^2)$

3. 第 4 页，2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 13 分析第 5 行

   $9\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=3\times3+15\times3=9\times6,$　　修改为　　$9\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times3+15\times3=9\times6,$

4. 第 5 页，2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 16 分析第 7 行

   进而在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理　　修改为　　进而在 $\triangle ABD$ 中应用余弦定理

5. 第 87 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 1 分析第 9 行

   于是 $f(x)$ 的值域为 $[b-|a|\cdot 2\sqrt{c}, b+|a|\cdot 2\sqrt{c}]$，

   修改为

   于是 $f(x)$ 的值域为 $\left[b-\dfrac{|a|}{2\sqrt{c}}, b+\dfrac{|a|}{2\sqrt{c}}\right]$，

6. 第 88 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 3 分析倒数最后 2 行

   $\sqrt{2^2-4(-a^2+1)}\leqslant 2$，解得 a 的取值范围是 $[-1,1]$. 修改为

   $\sqrt{2^2-4(-a^2+1)}\geqslant 2$，解得 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

7. 第 88 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 4 分析与解答

   修改为

   分析　由于 $1+2+\cdots+2017$ 模 11 的余数为 10，于是黑板上最后剩下的三个数模 11 的余数必然为 10，因此黑板上最后剩下的一个数为 10.

   解答　10.

8. 第 88 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 5 分析倒第 2 行

   $1<\dfrac{c}{a}\leqslant\dfrac{3}{4}$　　修改为　　$1<\dfrac{c}{a}\leqslant\dfrac{4}{3}$

9. 第 88 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 5 分析倒最后一行

   离心率的取值范围是 $\left(1,\dfrac{3}{4}\right]$　　修改为　　离心率的取值范围是 $\left(1,\dfrac{4}{3}\right]$

10. 第 88 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 5 解答

$\left(1,\dfrac{3}{4}\right]$　　修改为　　$\left(1,\dfrac{4}{3}\right]$

11. 第 89 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 6 分析中对④的分析修改为

根据题意，有

$$x^4+2(y^2+1)x^2+(y^2-1)^2=9,$$

于是

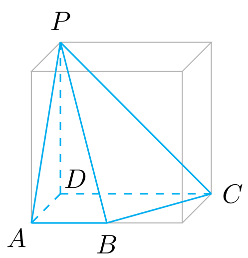
$$x^2=\sqrt{4y^2+9}-y^2-1\leqslant(y^2+3)-y^2-1=2,$$

从而 P 到 AB 距离的最大值为 $\sqrt{2}$，从而 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{2}$，命题错误.

12. 第 89 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 8 分析与解答

修改为

分析　如图，四个侧面均为直角三角形（$\angle PBC$ 为直角可以利用 $CB\perp PBD$ 得出）.



解答　4.

13. 第 90 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 12 题干

投掷一枚均匀的硬币，若出现两次正面朝上的情况即停止投掷，问总投掷次数的数学期望.

修改为

投掷一枚均匀的硬币，若出现连续两次正面朝上的情况即停止投掷，问总投掷次数的数学期望.

14. 第 92 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 15 解答最后一行

其中 $i=1,2,\cdots,n$，　　修改为　　其中 $i=0,1,\cdots,n-1$，

15. 第 92 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 16(2) 解答第 6 行

$A^-=\{a-b\mid a,b\in A,a\neq b\}$　　修改为　　$A^-=\{a-b\mid a,b\in A,a>b\}$

16. 第 92 页，2017 年清华大学暑期学校测试题 16(2) 解答倒数第 2 行

$n^2-|A^-\cap B^-|n^2-\dfrac{n(n-1)}{2}$　　修改为　　$n^2-|A^-\cap B^-|\geqslant n^2-\dfrac{n(n-1)}{2}$

17. 第 108 页，2017 年北京大学优特（U-Test）数学测试试题 20 倒数第 6,7 行

$\leqslant 3\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{4}}=3\sqrt{3}$　　修改为　　$\leqslant 3\sqrt{6}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^4}=\dfrac{9}{4}$

18. 第 108 页，2017 年北京大学优特（U-Test）数学测试试题 20 倒数第 2 行

最大值为 $3\sqrt{3}$　　修改为　　最大值为 $\dfrac{9}{4}$

19. 第 113 页，2017 年北京大学博雅计划数学试题题 1 分析第 2 行

$+\cdots+(\underbrace{10\cdots0}_{2017个}-5)$　　修改为　　$+\cdots+(1\underbrace{0\cdots0}_{2017个}-5)$

20. 第 125 页，2016 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 5 分析第 1 行

于是 $r^2+r+1=0$，　　修改为　　于是 $z^2+z+1=0$，

21. 第 128 页，2016 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 12 分析第 1 行

$+\dfrac{\sin x(3x-2x)}{\cos 3x\cos 2x}+\dfrac{\sin x(2x-x)}{\cos 2x\cos x}+$　　修改为　　$+\dfrac{\sin(3x-2x)}{\cos 3x\cos 2x}+\dfrac{\sin(2x-x)}{\cos 2x\cos x}+$

22. 第 134 页，2016 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 28 分析第 2 行

$I_n=\mathrm{C}_{n-1}^1\cdot\mathrm{A}_n^n$　　修改为　　$I_n=C_{n-1}\cdot\mathrm{A}_n^n$

23. 第 136 页，2016 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 33 分析倒数第 8 行

$n^2-1\equiv 3 \pmod 4$　　修改为　　$(n-1)^2<n^2-1<n^2$

24. 第 140 页，2016 年清华大学夏令营数学试题题 4 分析第 1 行

如下页图　　修改为　　如下图

25. 第 169 页，2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 8 解答

ABCD　　修改为　　BCD

26. 第 173 页，2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 21 解答对选项 B 的说理修改为

由于 a_n 为连续三个整数之积，必然为 6 的倍数.

27. 第 174 页，2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 22 解答

$\rho=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}$　　修改为　　$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$

28. 第 175 页，2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 25 解答

A　　修改为　　AC

29. 第 183 页，2015 年北京大学博雅计划数学试卷题 6 分析第 1 行

则 $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}$　　修改为　　则 $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}^2}$

30. 第 196 页，2014 年清华大学等五校联考自主招生试题 5 解答倒数第 1 行

等号当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得　　修改为　　等号当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时可以取得

31. 第 201 页，2014 年北京大学等三校联考试题 3 题干

$f\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)=\dfrac{f(a)+2f(b)}{3}=3$　　修改为　　$f\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)=\dfrac{f(a)+2f(b)}{3}$

32. 第 205 页，2013 年清华大学夏令营数学试题题 6 题干第 2 行

则“$(b-a)\in\{A\cup B\}$ 的概率为　　修改为　　则“$(b-a)\in(A\cup B)$ 的概率为

33. 第 217，2013 年清华大学保送生试题题 3 解法三倒数第 3 行

$=a^2b^3+b^2c^3-(b^3c+c^3a+a^3b)$　　修改为　　$=a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-(b^3c+c^3a+a^3b)$

34. 第 221 页，2013 年北京大学等三校联考自主招生保送生测试试题题 1 分析第 3 行

$x^3+ax^3+bx^2+cx+d=0$　　修改为　　$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

35. 第 226 页，2013 年北京大学保送生试题题 5 分析倒数第 8 行

$(a+b)^2+(c+d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2+\sqrt{2(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$

修改为

$(a+b)^2+(c+d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$

36. 第 231 页，2012 年清华大学暑期学校学业水平测试试题题 15 解答第 5 行

且由于 $\dfrac{A-B}{2}\in\left(-\dfrac{\pi-c}{2},\dfrac{\pi-c}{2}\right)$ 　修改为　且由于 $\dfrac{A-B}{2}\in\left(-\dfrac{\pi-C}{2},\dfrac{\pi-C}{2}\right)$

37. 第 232 页，2012 年清华大学自主选拔学业能力测试试题题 3 分析第 3 行

$=1-\dfrac{a^2}{a^2+h^2}<0$ 　修改为　$=-\dfrac{a^2}{a^2+h^2}<0$

38. 第 232 页，2012 年清华大学自主选拔学业能力测试试题题 14 分析倒数第 14 行

$f_{2n+2}(\theta_{2n+1})=f_{2n+1}(\theta_{2n+1})+\dfrac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!}+\dfrac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!}>0$

修改为

$f_{2n+2}(\theta_{2n+1})=f_{2n+1}(\theta_{2n+1})+\dfrac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!}=\dfrac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!}>0$

39. 第 239 页，2012 年清华大学保送生测试数学试题题 1 解析第 1 行

设 $z=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$）　修改为　设 $z=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0$）

40. 第 240 页，2012 年清华大学保送生测试数学试题题 7 题干

已知函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与直线 $y=x+4$ 围成区域中有矩形 $ABCD$，且点 A,B 在抛物线上，点 D 在直线上，其中点 B 在 y 轴右侧，且 AB 长为 $2t$（$t>0$）.

修改为

已知抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与直线 $y=x+4$ 围成区域（包括边界）中有矩形 $ABCD$，且点 A,B 在抛物线上，点 D 在直线上，其中点 B 在 y 轴右侧，且 AB 长为 $2t$（$t>0$）.

41. 第 240 页，2012 年清华大学保送生测试数学试题题 7 第 (2) 小题解析修改为

设边 AB 所在的直线方程为 $y=x+b$，则联立直线与抛物线的方程，有

$$x^2-2x-2b=0,$$

于是矩形 $ABCD$ 的面积

$$S=|AB|\cdot d(AB,CD)=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+8b}\right)\cdot\frac{4-b}{\sqrt{2}}=2\sqrt{1+2b}\cdot(4-b).$$

根据题意，直线 $y=x+4$ 与 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 相交点 $E(-2,2)$ 和 $F(4,8)$，进而可得 b 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$，而 S 在 $b\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$ 时单调递增，因此所求面积的最大值为 8 .

42. 第 241 页，2012 年清华大学保送生测试数学试题题 9 解答第 3 行

$g(x)=g(0)=0$ 　修改为　$g(x)\geqslant g(0)=0$

43. 第 249 页，2012 年北京大学等十三校联考自主招生试题题 10 解答倒数第 4 行

$|p_{n+1}^2-2q_{n+1}^2|=\left|(p_n+2q_n)^2-2(p_n+q_n)^2\right|=|2p_n^2-q_n^2|$

修改为

$\left|p_{n+1}^2-2q_{n+1}^2\right|=\left|(p_n+2q_n)^2-2(p_n+q_n)^2\right|=\left|2q_n^2-p_n^2\right|$

44. 第 249 页，2012 年北京大学等十三校联考自主招生试题题 10 备注倒数第 2 行

$q_9=958$ 修改为 $q_9=985$

45. 第 262 页，2011 年清华大学等七校联考自主招生试题题 5 解答

C. 修改为 D.

46. 第 266 页，2011 年清华大学等七校联考自主招生试题题 13 解法一 (2) 第 5 行

$1+4a\leqslant(1+a)^4$ 修改为 $1+4a<(1+a)^4$

47. 第 275 页，2011 年北京大学保送生试题题 1 解法二最后一行

$\dfrac{F_1Q}{F_2Q}=\dfrac{\dfrac{a^2}{x_0}+c}{c-\dfrac{a^2}{x_0}}=\dfrac{a+ex_0}{a-ex_0}=\dfrac{PF_1}{PF_2}.$ 修改为 $\dfrac{F_1Q}{F_2Q}=\dfrac{\dfrac{a^2}{x_0}+c}{c-\dfrac{a^2}{x_0}}=\dfrac{ex_0+a}{ex_0-a}=\dfrac{PF_1}{PF_2}.$

48. 第 293 页，2010 年北京大学等三校联考自主招生保送生测试试题题 3 解答第 1 行

直线 PA,PB 分别于 x 轴分别交于 M,A，

修改为

直线 PA,PB 分别于 x 轴分别交于 M,N，

49. 第 299 页，2009 年清华大学保送生试题（文科）题 3 题干第 1 行

不等式 $f'(x)+9x<0$ 的解集 修改为 不等式 $f'(x)+9x>0$ 的解集

50. 第 299 页，2009 年清华大学保送生试题（文科）题 3 题解答修改为

(1) 根据题意，有

$$f'(x)=a(x-1)(x-2)-9x,$$

即

$$f'(x)=ax^2-(3a+9)x+2a,$$

其中 $a<0$．因此方程 $f'(x)+7a=0$ 即

$$ax^2-(3a+9)x+9a=0,$$

该方程有两个相等实根，因此其判别式

$$\Delta=(3a+9)^2-36a^2=-27(a+1)(a-3)=0,$$

从而 $a=-1$，因此

$$f'(x)=-x^2-6x-2.$$

(2) 根据题意，有

$$\begin{cases}a<0,\\(3a+9)^2-8a^2\leqslant 0,\end{cases}$$

解得

$$-27-18\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -27+18\sqrt{2},$$

于是实数 a 的取值范围是 $\left[-27-18\sqrt{2}, -27+18\sqrt{2}\right]$.

51. 第 319 页，2007 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 1 解析修改为

函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2},$$

于是

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$

因此 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$；当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值为 e，无极大值.