

《北大清华自主招生数学试题的分析与解》勘误

兰琦

2018 年 11 月 13 日

第 1 节 第 1 次印刷

- 第 2 页, 2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 8 分析第 1 行
与向量 $(2, 1)$ 的数量积 修改为 与向量 $(2, -1)$ 的数量积
- 第 4 页, 2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 12 分析倒数第 3 行
 $4 + 4(a+b)^2 \leq 4 + 8(a^2 + b^2)$ 修改为 $4 + 4(a+b)^2 < 4 + 8(a^2 + b^2)$
- 第 4 页, 2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 13 分析第 5 行
 $9a \times b = 3 \times 3 + 15 \times 3 = 9 \times 6,$ 修改为 $9a \cdot b = 3 \times 3 + 15 \times 3 = 9 \times 6,$
- 第 5 页, 2018 年清华大学 THUSSAT 测试文科数学 (三测) 题 16 分析第 7 行
进而在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理 修改为 进而在 $\triangle ABD$ 中应用余弦定理
- 第 87 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 1 分析第 9 行
于是 $f(x)$ 的值域为 $[b - |a| \cdot 2\sqrt{c}, b + |a| \cdot 2\sqrt{c}]$,
修改为
于是 $f(x)$ 的值域为 $\left[b - \frac{|a|}{2\sqrt{c}}, b + \frac{|a|}{2\sqrt{c}} \right]$,
- 第 88 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 3 分析倒数最后 2 行
 $\sqrt{2^2 - 4(-a^2 + 1)} \leq 2$, 解得 a 的取值范围是 $[-1, 1]$. 修改为
 $\sqrt{2^2 - 4(-a^2 + 1)} \geq 2$, 解得 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- 第 88 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 4 分析与解答
修改为
分析 由于 $1 + 2 + \cdots + 2017$ 模 11 的余数为 10, 于是黑板上最后剩下的三个数模 11 的余数必然为 10, 因此黑板上最后剩下的一个数为 10.
解答 10.
- 第 88 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 5 分析倒第 2 行
 $1 < \frac{c}{a} \leq \frac{3}{4}$ 修改为 $1 < \frac{c}{a} \leq \frac{4}{3}$
- 第 88 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 5 分析倒最后一行
离心率的取值范围是 $\left(1, \frac{3}{4}\right]$ 修改为 离心率的取值范围是 $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

10. 第 88 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 5 解答

$$\left(1, \frac{3}{4}\right) \quad \text{修改为} \quad \left(1, \frac{4}{3}\right)$$

11. 第 89 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 6 分析中对④的分析修改为

根据题意, 有

$$x^4 + 2(y^2 + 1)x^2 + (y^2 - 1)^2 = 9,$$

于是

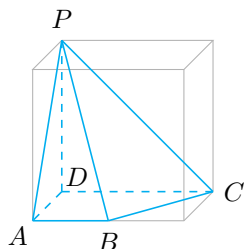
$$x^2 = \sqrt{4y^2 + 9} - y^2 - 1 \leq (y^2 + 3) - y^2 - 1 = 2,$$

从而 P 到 AB 距离的最大值为 $\sqrt{2}$, 从而 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{2}$, 命题错误.

12. 第 89 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 8 分析与解答

修改为

分析 如图, 四个侧面均为直角三角形 ($\angle PBC$ 为直角可以利用 $CB \perp PBD$ 得出)



解答 4.

13. 第 90 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 12 题干

投掷一枚均匀的硬币, 若出现两次正面朝上的情况即停止投掷, 问总投掷次数的数学期望.

修改为

投掷一枚均匀的硬币, 若出现连续两次正面朝上的情况即停止投掷, 问总投掷次数的数学期望.

14. 第 92 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 15 解答最后一行

其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 修改为 其中 $i = 0, 1, \dots, n-1$,

15. 第 92 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 16(2) 解答第 6 行

$$A^- = \{a - b \mid a, b \in A, a \neq b\} \quad \text{修改为} \quad A^- = \{a - b \mid a, b \in A, a > b\}$$

16. 第 92 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 16(2) 解答倒数第 2 行

$$n^2 - |A^- \cap B^-| \geq n^2 - \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{修改为} \quad n^2 - |A^- \cap B^-| \geq n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$$

17. 第 108 页, 2017 年北京大学优特 (U-Test) 数学测试试题题 20 倒数第 6,7 行

$$\leq 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{3} \quad \text{修改为} \quad \leq 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{9}{4}$$

18. 第 108 页, 2017 年北京大学优特 (U-Test) 数学测试试题题 20 倒数第 2 行

最大值为 $3\sqrt{3}$ 修改为 最大值为 $\frac{9}{4}$

19. 第 113 页, 2017 年北京大學博雅計劃數學試題 1 分析第 2 行
 $+ \cdots + \underbrace{(10 \cdots 0)}_{2017 \uparrow} - 5)$ 修改為 $+ \cdots + \underbrace{(10 \cdots 0)}_{2017 \uparrow} - 5)$
20. 第 125 页, 2016 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 5 分析第 1 行
 於是 $r^2 + r + 1 = 0$, 修改為 於是 $z^2 + z + 1 = 0$,
21. 第 128 页, 2016 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 12 分析第 1 行
 $+\frac{\sin x(3x-2x)}{\cos 3x \cos 2x} + \frac{\sin x(2x-x)}{\cos 2x \cos x} +$ 修改為 $+\frac{\sin(3x-2x)}{\cos 3x \cos 2x} + \frac{\sin(2x-x)}{\cos 2x \cos x} +$
22. 第 134 页, 2016 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 28 分析第 2 行
 $I_n = C_{n-1}^1 \cdot A_n^n$ 修改為 $I_n = C_{n-1} \cdot A_n^n$
23. 第 136 页, 2016 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 33 分析倒數第 8 行
 $n^2 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ 修改為 $(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2$
24. 第 140 页, 2016 年清華大學夏令營數學試題 4 分析第 1 行
 如下頁圖 修改為 如下圖
25. 第 169 页, 2015 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 8 解答
 ABCD 修改為 BCD
26. 第 173 页, 2015 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 21 解答對選項 B 的說理修改為
 由於 a_n 為連續三個整數之積, 必然為 6 的倍數.
27. 第 175 页, 2015 年清華大學自主招生暨領軍計劃試題 25 解答
 A 修改為 AC
28. 第 183 页, 2015 年北京大學博雅計劃數學試卷題 6 分析第 1 行
 則 $\frac{\alpha}{\alpha}$ 修改為 則 $\frac{\alpha}{\alpha^2}$
29. 第 196 页, 2014 年清華大學等五校聯考自主招生試題 5 解答倒數第 1 行
 等號當且僅當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時取得 修改為 等號當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時可以取得
30. 第 201 页, 2014 年北京大學等三校聯考試題 3 題干
 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3} = 3$ 修改為 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$
31. 第 205 页, 2013 年清華大學夏令營數學試題 6 題干第 2 行
 則“ $(b-a) \in \{A \cup B\}$ ”的概率為 修改為 則“ $(b-a) \in (A \cup B)$ ”的概率為
32. 第 217, 2013 年清華大學保送生試題 3 解法三倒數第 3 行
 $= a^2b^3 + b^2c^3 - (b^3c + c^3a + a^3b)$ 修改為 $= a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 - (b^3c + c^3a + a^3b)$
33. 第 221 页, 2013 年北京大學等三校聯考自主招生保送生測試試題 1 分析第 3 行
 $x^3 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 修改為 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

34. 第 226 页, 2013 年北京大学保送生试题题 5 分析倒数第 8 行

$$(a+b)^2 + (c+d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 + \sqrt{2(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$$

修改为

$$(a+b)^2 + (c+d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$$

35. 第 231 页, 2012 年清华大学暑期学校学业水平测试试题题 15 解答第 5 行

$$\text{且由于 } \frac{A-B}{2} \in \left(-\frac{\pi-c}{2}, \frac{\pi-c}{2}\right) \quad \text{修改为} \quad \text{且由于 } \frac{A-B}{2} \in \left(-\frac{\pi-C}{2}, \frac{\pi-C}{2}\right)$$

36. 第 232 页, 2012 年清华大学自主选拔学业能力测试试题题 3 分析第 3 行

$$= 1 - \frac{a^2}{a^2 + h^2} < 0 \quad \text{修改为} \quad = -\frac{a^2}{a^2 + h^2} < 0$$

37. 第 232 页, 2012 年清华大学自主选拔学业能力测试试题题 14 分析倒数第 14 行

$$f_{2n+2}(\theta_{2n+1}) = f_{2n+1}(\theta_{2n+1}) + \frac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$$

修改为

$$f_{2n+2}(\theta_{2n+1}) = f_{2n+1}(\theta_{2n+1}) + \frac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{\theta_{2n+1}^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$$

38. 第 239 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 1 解析第 1 行

$$\text{设 } z = a + bi \quad (a, b \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \neq 0) \quad \text{修改为} \quad \text{设 } z = a + bi \quad (a, b \in \mathbf{R} \text{ 且 } b \neq 0)$$

39. 第 240 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 7 题干

已知函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 与直线 $y = x + 4$ 围成区域中有矩形 $ABCD$, 且点 A, B 在抛物线上, 点 D 在直线上, 其中点 B 在 y 轴右侧, 且 AB 长为 $2t$ ($t > 0$).

修改为

已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 与直线 $y = x + 4$ 围成区域 (包括边界) 中有矩形 $ABCD$, 且点 A, B 在抛物线上, 点 D 在直线上, 其中点 B 在 y 轴右侧, 且 AB 长为 $2t$ ($t > 0$).

40. 第 240 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 7 第 (2) 小题解析修改为

设边 AB 所在的直线方程为 $y = x + b$, 则联立直线与抛物线的方程, 有

$$x^2 - 2x - 2b = 0,$$

于是矩形 $ABCD$ 的面积

$$S = |AB| \cdot d(AB, CD) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 8b}) \cdot \frac{4-b}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{1+2b} \cdot (4-b).$$

根据题意, 直线 $y = x + 4$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2$ 相交点 $E(-2, 2)$ 和 $F(4, 8)$, 进而可得 b 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$,

而 S 在 $b \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ 时单调递增, 因此所求面积的最大值为 8.

41. 第 241 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 9 解答第 3 行

$$g(x) = g(0) = 0 \quad \text{修改为} \quad g(x) \geq g(0) = 0$$

42. 第 249 页, 2012 年北京大学等十三校联考自主招生试题题 10 解答倒数第 4 行

$$|p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2| = |(p_n + 2q_n)^2 - 2(p_n + q_n)^2| = |2p_n^2 - q_n^2|$$

修改为

$$|p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2| = |(p_n + 2q_n)^2 - 2(p_n + q_n)^2| = |2q_n^2 - p_n^2|$$

43. 第 249 页, 2012 年北京大学等十三校联考自主招生试题题 10 备注倒数第 2 行

$$q_9 = 958 \quad \text{修改为} \quad q_9 = 985$$

44. 第 262 页, 2011 年清华大学等七校联考自主招生试题题 5 解答

C. 修改为 D.

45. 第 266 页, 2011 年清华大学等七校联考自主招生试题题 13 解法一 (2) 第 5 行

$$1 + 4a \leq (1 + a)^4 \quad \text{修改为} \quad 1 + 4a < (1 + a)^4$$

46. 第 275 页, 2011 年北京大学保送生试题题 1 解法二最后一行

$$\frac{F_1 Q}{F_2 Q} = \frac{\frac{a^2}{x_0} + c}{c - \frac{a^2}{x_0}} = \frac{a + ex_0}{a - ex_0} = \frac{PF_1}{PF_2}. \quad \text{修改为} \quad \frac{F_1 Q}{F_2 Q} = \frac{\frac{a^2}{x_0} + c}{c - \frac{a^2}{x_0}} = \frac{ex_0 + a}{ex_0 - a} = \frac{PF_1}{PF_2}.$$

47. 第 293 页, 2010 年北京大学等三校联考自主招生保送生测试试题题 3 解答第 1 行

直线 PA, PB 分别于 x 轴分别交于 M, A ,

修改为

直线 PA, PB 分别于 x 轴分别交于 M, N ,

48. 第 299 页, 2009 年清华大学保送生试题 (文科) 题 3 题干第 1 行

不等式 $f'(x) + 9x < 0$ 的解集 修改为 不等式 $f'(x) + 9x > 0$ 的解集

49. 第 299 页, 2009 年清华大学保送生试题 (文科) 题 3 题解答修改为

(1) 根据题意, 有

$$f'(x) = a(x-1)(x-2) - 9x,$$

即

$$f'(x) = ax^2 - (3a+9)x + 2a,$$

其中 $a < 0$. 因此方程 $f'(x) + 7a = 0$ 即

$$ax^2 - (3a+9)x + 9a = 0,$$

该方程有两个相等实根, 因此其判别式

$$\Delta = (3a+9)^2 - 36a^2 = -27(a+1)(a-3) = 0,$$

从而 $a = -1$, 因此

$$f'(x) = -x^2 - 6x - 2.$$

(2) 根据题意, 有

$$\begin{cases} a < 0, \\ (3a+9)^2 - 8a^2 \leq 0, \end{cases}$$

解得

$$-27 - 18\sqrt{2} \leq a \leq -27 + 18\sqrt{2},$$

于是实数 a 的取值范围是 $[-27 - 18\sqrt{2}, -27 + 18\sqrt{2}]$.

50. 第 319 页, 2007 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 1 解析修改为
函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

于是

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	\searrow	\searrow	e	\nearrow

因此 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$; 当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有极小值为 e, 无极大值.