

# 《北大清华自主招生数学试题的分析与解》勘误

兰琦

2018年10月7日

## 第1节 第1次印刷

- 第2页, 2018年清华大学 THUSSAT 测试文科数学(三测)题8分析第1行  
与向量  $(2, 1)$  的数量积 修改为 与向量  $(2, -1)$  的数量积
- 第4页, 2018年清华大学 THUSSAT 测试文科数学(三测)题12分析倒数第3行  
 $4 + 4(a+b)^2 \leq 4 + 8(a^2 + b^2)$  修改为  $4 + 4(a+b)^2 < 4 + 8(a^2 + b^2)$
- 第5页, 2018年清华大学 THUSSAT 测试文科数学(三测)题16分析第7行  
进而在  $\triangle ABC$  中应用余弦定理 修改为 进而在  $\triangle ABD$  中应用余弦定理
- 第87页, 2017年清华大学暑期学校测试题1分析第9行  
于是  $f(x)$  的值域为  $[b - |a| \cdot 2\sqrt{c}, b + |a| \cdot 2\sqrt{c}]$ , 修改为 于是  $f(x)$  的值域为  $\left[b - \frac{|a|}{2\sqrt{c}}, b + \frac{|a|}{2\sqrt{c}}\right]$ ,
- 第88页, 2017年清华大学暑期学校测试题4分析与解答  
修改为  
**分析** 由于  $1 + 2 + \cdots + 2017$  模 11 的余数为 10, 于是黑板上最后剩下的三个数模 11 的余数必然为 10, 因此黑板上最后剩下的一个数为 10.  
**解答** 10.
- 第88页, 2017年清华大学暑期学校测试题5分析倒第2行  
 $1 < \frac{c}{a} \leq \frac{3}{4}$  修改为  $1 < \frac{c}{a} \leq \frac{4}{3}$
- 第88页, 2017年清华大学暑期学校测试题5分析倒最后一行  
离心率的取值范围是  $\left(1, \frac{3}{4}\right)$  修改为 离心率的取值范围是  $\left(1, \frac{4}{3}\right)$
- 第88页, 2017年清华大学暑期学校测试题5解答  
 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$  修改为  $\left(1, \frac{4}{3}\right)$
- 第89页, 2017年清华大学暑期学校测试题6分析中对④的分析修改为  
根据题意, 有

$$x^4 + 2(y^2 + 1)x^2 + (y^2 - 1)^2 = 9,$$

于是

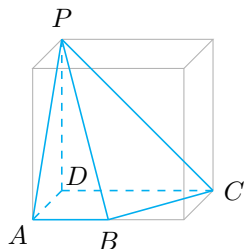
$$x^2 = \sqrt{4y^2 + 9} - y^2 - 1 \leq (y^2 + 3) - y^2 - 1 = 2,$$

从而  $P$  到  $AB$  距离的最大值为  $\sqrt{2}$ , 从而  $\triangle PAB$  面积的最大值为  $\sqrt{2}$ , 命题错误.

10. 第 89 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 8 分析与解答

修改为

**分析** 如图, 四个侧面均为直角三角形 ( $\angle PBC$  为直角可以利用  $CB \perp PBD$  得出)



**解答** 4.

11. 第 90 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 12 题干

投掷一枚均匀的硬币, 若出现两次正面朝上的情况即停止投掷, 问总投掷次数的数学期望.

修改为

投掷一枚均匀的硬币, 若出现连续两次正面朝上的情况即停止投掷, 问总投掷次数的数学期望.

12. 第 92 页, 2017 年清华大学暑期学校测试题 16(2) 解答第 6 行

$A^- = \{a - b \mid a, b \in A, a \neq b\}$  修改为  $A^- = \{a - b \mid a, b \in A, a > b\}$

13. 第 108 页, 2017 年北京大学优特 (U-Test) 数学测试试题题 20 倒数第 6,7 行

$\leq 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{3}$  修改为  $\leq 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{9}{4}$

14. 第 108 页, 2017 年北京大学优特 (U-Test) 数学测试试题题 20 倒数第 2 行

最大值为  $3\sqrt{3}$  修改为 最大值为  $\frac{9}{4}$

15. 第 125 页, 2016 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 5 分析第 1 行

于是  $r^2 + r + 1 = 0$ , 修改为 于是  $z^2 + z + 1 = 0$ ,

16. 第 128 页, 2016 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 12 分析第 1 行

$+\frac{\sin x(3x-2x)}{\cos 3x \cos 2x} + \frac{\sin x(2x-x)}{\cos 2x \cos x} +$  修改为  $+\frac{\sin(3x-2x)}{\cos 3x \cos 2x} + \frac{\sin(2x-x)}{\cos 2x \cos x} +$

17. 第 140 页, 2016 年清华大学夏令营数学试题题 4 分析第 1 行

如下页图 修改为 如下图

18. 第 169 页, 2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 8 解答

ABCD 修改为 BCD

19. 第 173 页, 2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 21 解答对选项 B 的说理修改为

由于  $a_n$  为连续三个整数之积, 必然为 6 的倍数.

20. 第 175 页, 2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 25 解答

A 修改为 AC

21. 第 183 页, 2015 年北京大学博雅计划数学试卷题 6 分析第 1 行

则  $\frac{\alpha}{\alpha}$  修改为 则  $\frac{\alpha}{\alpha^2}$

22. 第 196 页, 2014 年清华大学等五校联考自主招生试题题 5 解答倒数第 1 行

等号当且仅当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时取得 修改为 等号当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时可以取得

23. 第 201 页, 2014 年北京大学等三校联考试题题 3 题干

$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3} = 3$  修改为  $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$

24. 第 205 页, 2013 年清华大学夏令营数学试题题 6 题干第 2 行

则“ $(b-a) \in \{A \cup B\}$ ”的概率为 修改为 则“ $(b-a) \in (A \cup B)$ ”的概率为

25. 第 231 页, 2012 年清华大学暑期学校学业水平测试试题题 15 解答第 5 行

且由于  $\frac{A-B}{2} \in \left(-\frac{\pi-c}{2}, \frac{\pi-c}{2}\right)$  修改为 且由于  $\frac{A-B}{2} \in \left(-\frac{\pi-C}{2}, \frac{\pi-C}{2}\right)$

26. 第 239 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 1 解析第 1 行

设  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ ) 修改为 设  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$  且  $b \neq 0$ )

27. 第 240 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 7 题干

已知函数  $y = \frac{1}{2}x^2$  与直线  $y = x + 4$  围成区域中有矩形  $ABCD$ , 且点  $A, B$  在抛物线上, 点  $D$  在直线上, 其中点  $B$  在  $y$  轴右侧, 且  $AB$  长为  $2t$  ( $t > 0$ ).

修改为

已知抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  与直线  $y = x + 4$  围成区域 (包括边界) 中有矩形  $ABCD$ , 且点  $A, B$  在抛物线上, 点  $D$  在直线上, 其中点  $B$  在  $y$  轴右侧, 且  $AB$  长为  $2t$  ( $t > 0$ ).

28. 第 240 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 7 第 (2) 小题解析修改为

设边  $AB$  所在的直线方程为  $y = x + b$ , 则联立直线与抛物线的方程, 有

$$x^2 - 2x - 2b = 0,$$

于是矩形  $ABCD$  的面积

$$S = |AB| \cdot d(AB, CD) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+8b}) \cdot \frac{4-b}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{1+2b} \cdot (4-b).$$

根据题意, 直线  $y = x + 4$  与  $y = \frac{1}{2}x^2$  相交点  $E(-2, 2)$  和  $F(4, 8)$ , 进而可得  $b$  的取值范围是  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ ,

而  $S$  在  $b \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]$  时单调递增, 因此所求面积的最大值为 8.

29. 第 241 页, 2012 年清华大学保送生测试数学试题题 9 解答第 3 行

$g(x) = g(0) = 0$  修改为  $g(x) \geq g(0) = 0$

30. 第 262 页, 2011 年清华大学等七校联考自主招生试题题 5 解答

C. 修改为 D.

31. 第 266 页, 2011 年清华大学等七校联考自主招生试题题 13 解法一 (2) 第 5 行

$1 + 4a \leq (1+a)^4$  修改为  $1 + 4a < (1+a)^4$

32. 第 275 页, 2011 年北京大学保送生试题题 1 解法二最后一行

$$\frac{F_1Q}{F_2Q} = \frac{\frac{a^2}{x_0} + c}{c - \frac{a^2}{x_0}} = \frac{a + ex_0}{a - ex_0} = \frac{PF_1}{PF_2}. \quad \text{修改为} \quad \frac{F_1Q}{F_2Q} = \frac{\frac{a^2}{x_0} + c}{c - \frac{a^2}{x_0}} = \frac{ex_0 + a}{ex_0 - a} = \frac{PF_1}{PF_2}.$$

33. 第 293 页, 2010 年北京大学等三校联考自主招生保送生测试试题题 3 解答第 1 行

直线  $PA, PB$  分别于  $x$  轴分别交于  $M, A$ ,

修改为

直线  $PA, PB$  分别于  $x$  轴分别交于  $M, N$ ,

34. 第 299 页, 2009 年清华大学保送生试题 (文科) 题 3 题干第 1 行

不等式  $f'(x) + 9x < 0$  的解集 修改为 不等式  $f'(x) + 9x > 0$  的解集

35. 第 299 页, 2009 年清华大学保送生试题 (文科) 题 3 题解答修改为

(1) 根据题意, 有

$$f'(x) = a(x-1)(x-2) - 9x,$$

即

$$f'(x) = ax^2 - (3a+9)x + 2a,$$

其中  $a < 0$ . 因此方程  $f'(x) + 7a = 0$  即

$$ax^2 - (3a+9)x + 9a = 0,$$

该方程有两个相等实根, 因此其判别式

$$\Delta = (3a+9)^2 - 36a^2 = -27(a+1)(a-3) = 0,$$

从而  $a = -1$ , 因此

$$f'(x) = -x^2 - 6x - 2.$$

(2) 根据题意, 有

$$\begin{cases} a < 0, \\ (3a+9)^2 - 8a^2 \leq 0, \end{cases}$$

解得

$$-27 - 18\sqrt{2} \leq a \leq -27 + 18\sqrt{2},$$

于是实数  $a$  的取值范围是  $[-27 - 18\sqrt{2}, -27 + 18\sqrt{2}]$ .

36. 第 319 页, 2007 年清华大学自主招生暨领军计划试题题 1 解析修改为

函数  $f(x)$  的导函数

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

于是

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$

因此  $f(x)$  的单调递减区间为  $(-\infty, 0)$  和  $(0, 1)$ , 单调递增区间为  $(1, +\infty)$ ; 当  $x = 1$  时,  $f(x)$  有极小值为 e, 无极大值.