

《高考数学压轴题的分析与解 (第 2 版) 勘误

2018 年 9 月 16 日

第 1 节 第 1,2 次印刷

与上个版本的差别是新增 28.

1. 第 3 页第 1 行, 2018 年全国 I 卷理科题 21

此时

| | | | | | |
|---------|--|--------------------------------|---|--------------------------------|--|
| x | $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ | $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ | $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ | $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ | $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | \searrow | | \nearrow | | \searrow |

修改为

此时

| | | | | | |
|---------|--|--------------------------------|---|--------------------------------|--|
| x | $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ | $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ | $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ | $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ | $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | \searrow | | \nearrow | | \searrow |

2. 第 7 页倒数第 4 行, 2018 年全国 II 卷理科题 21

考虑到当 $x < \sqrt{a}$ 时, 有 修改为 考虑到当 $x < \frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, 有

3. 第 7 页和第 9 页第 9 行开始, 2018 年全国 II 卷理科题 20 与 2018 年全国 II 卷文科题 20 (两题相同)

第 (2) 小题的解析 修改为

设 $A(4a^2, 4a)$, $B(4b^2, 4b)$, 则直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{a+b}$, 根据第 (1) 小题的结果, 有

$$\frac{1}{a+b} = 1,$$

根据抛物线的几何性质, 有

$$ab = -\frac{1}{4},$$

于是 AB 的中点坐标为 $M(2a^2 + 2b^2, 2a + 2b)$, 即 $M(3, 2)$. 设圆心为 $P(m, n)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ PM^2 = PA^2 - \frac{1}{4}AB^2, \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} (m-3) + (n-2) = 0, \\ (m-3)^2 + (n-2)^2 = (m+1)^2 - 4^2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} m+n=5, \\ n^2-4n-8m+28=0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m=3, \\ n=2, \end{cases} \vee \begin{cases} m=11, \\ n=-6, \end{cases}$$

于是所求圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 和 $(x-11)^2 + (y+6)^2 = 144$.

4. 第 9 页解答第 3 行, 2018 年全国 II 卷文科题 21

函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ 和 $(3-2\sqrt{3}, +\infty)$

修改为

函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ 和 $(3+2\sqrt{3}, +\infty)$

5. 第 9 页倒数第 2 行, 2018 年全国 II 卷文科题 21

因此 $g(x)$ 为 \mathbb{R} 上的单调的三次函数, 必然只有一个零点.

修改为

因此 $g(x)$ 为 \mathbb{R} 上的单调函数, 又

$$g(x) = x^2(ax+a) + \left(ax - \frac{1}{3}\right),$$

于是

$$g(-1) \cdot g\left(\frac{1}{3a}\right) = \left(-a - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{9a^2} \left(\frac{1}{3} + a\right) \leq 0,$$

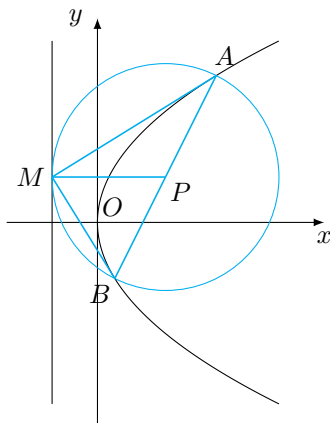
因此 $g(x)$ 只有一个零点.

6. 第 10 页第 9 行, 2018 年全国 III 卷理科题 12

从而 $a = \frac{1-y}{1-x}, b = \frac{1-y}{x}$, 修改为 从而 $a = \frac{1-y}{1-x}, b = -\frac{1-y}{x}$,

7. 第 10 页配图, 2018 年全国 III 卷理科题 16

修改为



8. 第 12 页倒数第 3 行, 2018 年全国 III 卷理科题 21
 于是函数 $f'''(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 结合 $f'''(0) = 0$, 逐层分析
 修改为
 于是函数 $f''(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 结合 $f''(0) = 0$, 逐层分析
9. 第 14 页倒数第 5 行, 2018 年全国 III 卷文科题 21
 则其导函数 $g'(x) = -e^x(x+1)(x-2)$, 修改为 则其导函数 $g'(x) = -e^{-x}(x+1)(x-2)$,
10. 第 17 页拓展上方第 2 行, 2018 年北京卷理科题 19
 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{(k-1)x_1x_2} = 2$ 修改为 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{(k-1)x_1x_2} = 2$
11. 第 21 页“引理”之前, 2018 年北京卷文科题 20
 因此 $|AB|$ 的最大值为 6. 修改为 因此 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{6}$.
12. 第 21 页“引理”之后, 2018 年北京卷文科题 20
 过点 $A(a \cos 2\alpha, b \sin \alpha)$ 修改为 过点 $A(a \cos 2\alpha, b \sin 2\alpha)$
13. 第 21 页倒数第 6 行, 2018 年北京卷文科题 20
 又直线 BD 过点 $(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, 于是 修改为 又直线 CD 过点 $(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, 于是
14. 第 23 页倒数第 2 行, 2018 年江苏卷题 14
 $S_{21} = 318, 12a_{22} = 372$ 修改为 $S_{21} = 318, 12a_{22} = 396$
15. 第 24 页开头表格, 2018 年江苏卷题 14

| n | a_n | S_n | $12a_{n+1}$ |
|-----|-------|-------|-------------|
| 21 | 32 | 318 | 396 |
| 22 | 33 | 351 | 420 |
| 23 | 35 | 386 | 444 |
| 24 | 37 | 423 | 468 |
| 25 | 39 | 462 | 492 |
| 27 | 41 | 503 | 516 |
| 28 | 43 | 546 | 540 |

修改为

| n | a_n | S_n | $12a_{n+1}$ |
|-----|-------|-------|-------------|
| 21 | 32 | 318 | 396 |
| 22 | 33 | 351 | 420 |
| 23 | 35 | 386 | 444 |
| 24 | 37 | 423 | 468 |
| 25 | 39 | 462 | 492 |
| 26 | 41 | 503 | 516 |
| 27 | 43 | 546 | 540 |

16. 第 29 页配图, 2018 年上海卷题 20

修改为

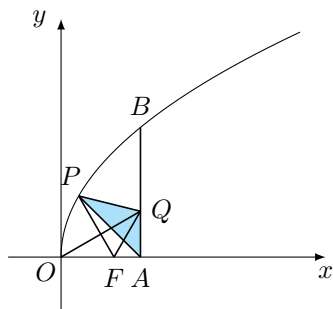


图 1

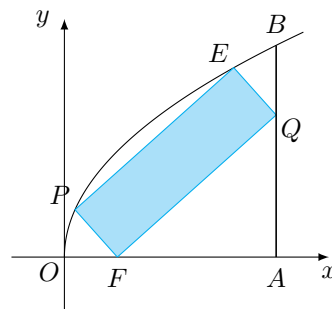


图 2

17. 第 30 页第 15 行, 2018 年上海卷题 11

$b_{2k} - b_{2k-1} = 2 + d > 0$ 修改为 $b_{2k} - b_{2k-1} = 2 + d > 0$

18. 第 33 页第 5 行, 2018 年天津卷理科题 20

$y \frac{\ln x_2}{\ln a} + \frac{1}{x_2 \ln a} (x - x_2)$ 修改为 $y = \frac{\ln x_2}{\ln a} + \frac{1}{x_2 \ln a} (x - x_2)$

19. 第 33 页第 13 行, 2018 年天津卷理科题 20

$(e^{\frac{1}{e}})^{x_1} = \frac{e^2}{x_2}$ 修改为 $(e^{\frac{1}{e}})^{x_1} = \frac{e^2}{x_2}$

20. 第 36 页倒数第 11 行, 2018 年天津卷文科题 20

当 $a > 3$ 时, 有

$$h(-2a) = -2a^3 + 6\sqrt{3} < 0,$$

且

$$h(2a) = 2a^3 + 6\sqrt{3} > 0,$$

于是函数 $h(x)$ 在 $(-2a, -\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, 2a)$ 上均有零点, 结合函数 $h(x)$ 的单调性可得函数 $h(x)$ 有三个零点.

修改为

当 $a > 3$ 时, 有

$$h(-2\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + 6\sqrt{3} < 0,$$

且

$$h(2\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + 6\sqrt{3} > 0,$$

于是函数 $h(x)$ 在 $(-2\sqrt{a}, -\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, 2\sqrt{a})$ 上均有零点, 结合函数 $h(x)$ 的单调性可得函数 $h(x)$ 有三个零点.

21. 第 37 页第 10 行, 2018 年浙江卷题 9

$$(b-3e) \cdot (b-e) = 0 \quad \text{修改为 (斜体改为黑斜体)} \quad (b-3e) \cdot (b-e) = 0$$

22. 第 37 页 2018 年浙江卷题 10“分析”第 6 行

$$a_4 \leq 1 \quad \text{修改为} \quad a_4 \leq -1$$

23. 第 38 页第 2 行, 2018 年浙江卷题 17

$$\frac{(2x_2)^2}{4} + (2y_2)^2 = 4m, \quad \text{修改为} \quad \frac{(2x_2)^2}{4} + (2y_2)^2 = 4m,$$

24. 第 39 页 2018 年浙江卷题 21 第 (2) 小题解析第 4 行, 2018 年浙江卷题 21

$$S = \frac{1}{2} |(4a^2 - x_0)(2a - 2b) - (4b^2 - x_0)(2b - 2a)|$$

修改为 (更符合三角形面积坐标公式)

$$S = \frac{1}{2} |(4a^2 - x_0)(2b - 2a) - (4b^2 - x_0)(2a - 2b)|$$

25. 第 39 页 2018 年浙江卷题 22 上方第 1 行, 2018 年浙江卷题 21

从而 $|a-b|$ 的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{5}{2}})$, 因此 S 的取值范围是 $(6\sqrt{2}, \frac{15\sqrt{10}}{4})$.

修改为

从而 $|a-b|$ 的取值范围是 $[\sqrt{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}]$, 因此 S 的取值范围是 $[6\sqrt{2}, \frac{15\sqrt{10}}{4}]$.

26. 第 57 页, 2017 年北京卷理科题 20, 第 (2) 小题解答第 4 行

$$c_n = \max\{c_1, c_n\} = \max\{b_1 - a_n, b_0 + (d_2 - a_0)n - d_1 n^2\}$$

修改为

$$c_n = \max\{x_1, x_n\} = \max\{b_1 - a_n, b_0 + (d_2 - a_0)n - d_1 n^2\}$$

27. 第 61 页倒数第 5 行, 2017 年江苏卷题 23

$$= \frac{C_{m+n}^n}{1} \cdot \sum_{k=n}^{m+n} \frac{C_{k-2}^{n-2}}{n-1} \quad \text{修改为} \quad = \frac{1}{C_{m+n}^n} \cdot \sum_{k=n}^{m+n} \frac{C_{k-2}^{n-2}}{n-1}$$

28. 第 64 页倒数第 6 行, 2017 年山东卷理科题 21

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4k_1^2 + \frac{1}{k^2} + 5}} \quad \text{修改为} \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4k_1^2 + \frac{1}{k_1^2} + 5}}$$

29. 第 67 页, 2017 年山东卷文科题 21, 第 (2) 小题解答第 6 行

$$\sin \angle DEN = \frac{|ON|}{|DN|} \quad \text{修改为} \quad \sin \angle EDN = \frac{|ON|}{|DN|}$$

30. 第 67 页, 2017 年山东卷文科题 21, 第 (2) 小题解答第 7 行

$$= \frac{\frac{x_0^2}{2y_0} + y_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0^2}{2y_0} + 2y_0\right)}} \quad \text{修改为} \quad = \frac{\left|\frac{x_0^2}{2y_0} + y_0\right|}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0^2}{2y_0} + 2y_0\right)}}$$

31. 第 79 页第 2 行, 2017 年浙江卷题 22

$$x_n = f(x_n + 1) \quad \text{修改为} \quad x_n = f(x_{n+1})$$

32. 第 85 页倒数第 1 行, 2016 年全国 II 卷理科题 16

$$\text{解答 } 2 \quad \text{修改为} \quad \text{解答 } 1 - \ln 2$$

33. 第 96 页解答第 7 行, 2016 年北京卷理科题 19

$$N \text{ 点坐标为 } \left(\frac{2 \cos \theta}{1 - 2 \sin \theta}, 0\right), \quad \text{修改为} \quad N \text{ 点坐标为 } \left(\frac{2 \cos \theta}{1 - \sin \theta}, 0\right),$$

34. 第 96 页解答第 15 行, 2016 年北京卷理科题 19

$$\angle A'B'N = 45^\circ + \angle O'B'N' = \quad \text{修改为} \quad \angle A'B'N' = 45^\circ + \angle O'B'N' =$$

35. 第 97 页第 5 题解析倒数第 5 行, 2016 年北京卷理科题 19

$$a_{i_k} - a_{i_k-1} \leq a_{i_k} - a_{i_k-1} \leq 1 \quad \text{修改为} \quad a_{i_k} - a_{i_{k-1}} \leq a_{i_k} - a_{i_k-1} \leq 1$$

36. 第 100 页倒数第 4 行, 2016 年江苏卷题 14

$$\tan A = -\tan(B+C) = \frac{\tan B \tan C}{\tan B + \tan C - 1}, \quad \text{修改为} \quad \tan A = -\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \cdot \tan C - 1},$$

37. 第 131 页第 2 行, 2016 年浙江卷理科题 20

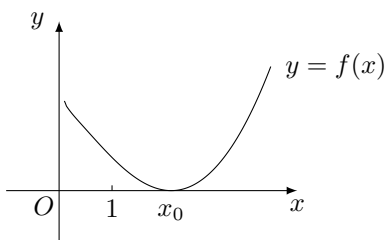
$$\left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right| + \quad \text{修改为} \quad \left|\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right| +$$

38. 第 131 页第 15 行, 2016 年浙江卷理科题 20, 第 (2) 小题解析第 8 行

$$\left(\frac{3}{4}\right)^m < f(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n = (|a_n| - 2) \quad \text{修改为} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^m < f(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (|a_n| - 2)$$

39. 第 200 页第 5 行, 2015 年四川卷理科题 21, 第 (2) 小题更新解法

解法一 用分析法证明如下. 根据题意结合第 (1) 小题的结论, 函数 $f(x)$ 的图象应该如图所示.



考虑函数 $g(x)$ ，由于 $g'(1) = 2a > 0$ ，于是在 $(1, +\infty)$ 上 $g(x)$ 单调递增。又 $g(1) = -4a < 0$ ，于是根据题意， $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上先单调递减，再单调递增，有极小值点 $x = x_0$ ，则

$$\begin{cases} -\ln x_0 + x_0 - 1 - a\left(\frac{1}{x_0} + 1\right) = 0, \\ -2(x_0 + a)\ln x_0 + x_0^2 - 2ax_0 - 2a^2 + a = 0, \end{cases}$$

我们的目标是证明这个二元方程组有实数解，且至少有一组解满足限制条件 $x_0 > 1$ 且 $0 < a < 1$ 。由第一个方程可得

$$-\ln x_0 = -x_0 + 1 + a\left(\frac{1}{x_0} + 1\right),$$

代入第二个方程，可得

$$x_0^3 + (2a - 2)x_0^2 - 5ax_0 - 2a^2 = 0,$$

因式分解，可得

$$(x_0 + 2a)(x_0^2 - 2x_0 - a) = 0,$$

于是

$$a = x_0^2 - 2x_0,$$

进而可得

$$a = x_0^2 - 2x_0 = -\ln x_0 + 1,$$

容易判断 $x_0 \in (2, e)$ ，于是 $a \in (0, 1 - \ln 2)$ ，原命题得证。

解法二 考虑到对于函数 $f(x)$ ，若 $f(x_0) = 0$ 且 $f'(x_0) = 0$ ，则函数 $f(x) \cdot \varphi(x)$ 也满足

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]_{x=x_0} = 0, [f(x) \cdot \varphi(x)]'_{x=x_0} = 0,$$

接下来“清君侧”即可。考虑函数 $g(x)$ ，由于 $g'(1) = 2a > 0$ ，于是在 $(1, +\infty)$ 上 $g(x)$ 单调递增。又 $g(1) = -4a < 0$ ， $g(+\infty) > 0$ ，于是 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上先单调递减，再单调递增，有极小值点。设 $f(x)$ 的极小值点为 $x = x_0$ ，令 $h(x) = \frac{f(x)}{x+a}$ ，即

$$h(x) = -2\ln x + x - 3a + \frac{a^2 + a}{x+a},$$

则有

$$h'(x) = \frac{(x+2a)(x^2-2x-a)}{x(x+a)^2},$$

于是可得

$$a = x_0^2 - 2x_0,$$

进而将其代入由 $h(x_0) = 0$, 即

$$-2 \ln x_0 + x_0 - 3a + \frac{a^2 + a}{x_0 + a} = 0,$$

可得

$$a = x_0^2 - 2x_0 = -\ln x_0 + 1,$$

容易判断 $x_0 \in (2, e)$, 于是 $a \in (0, 1 - \ln 2)$, 原命题得证.

40. 第 206 页, 2015 年浙江卷理科题 8 解析第 3 行

取 $\alpha = 0$, 此时 $A'DB > 0$ 或 $\angle A'DB = 0$, 修改为 取 $\alpha = 0$, 此时 $\angle A'DB > 0$ 或 $\angle A'DB = 0$,

41. 第 249 页“分析”的第 2 行, 2014 年湖北卷理科题 14

$$\frac{f(a) - 0}{a - \sqrt{ab}} = \frac{f(b) - 0}{\sqrt{ab} - b}, \quad \text{修改为} \quad \frac{f(a) - 0}{a - \sqrt{ab}} = \frac{0 - (-f(b))}{\sqrt{ab} - b},$$