2017 年高考数学压轴题的分析与解

兰　琦

2017 年 9 月 2 日

目录

1　2017 年全国 I 卷理

例题 1

(理 12) 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件．为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动．这款软件的激活码为下面数学问题的答案：

已知数列 $1,1,2,1,2,4,1,2,4,8,1,2,4,8,16,\cdots$ ，其中第一项是 2^0 ，接下来的两项是 $2^0,2^1$ ，再接下来的三项是 $2^0,2^1,2^2$ ，依此类推．求满足如下条件的最小整数 N ： $N>100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂．那么该款软件的激活码是 (　　)

A. 440　　B. 330　　C. 220　　D. 110

解析　*A.*

分段考虑数列

$$\begin{aligned}&1,\\&1,2,\\&1,2,4,\\&\cdots,\\&1,2,\cdots,2^{k-1},\\&\cdots,\end{aligned}$$

该数列的前 $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 项的和为

$$S\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+2^{k-1})=2^{k+1}-k-2.$$

要使得 $\dfrac{k(k+1)}{2}>100$ ，有 $k\geqslant 14$ ，此时 $k+2<2^{k+1}$ ，所以 $k+2$ 是之后的等比数列 $1,2,\cdots,2^k$ 的部分和，也即

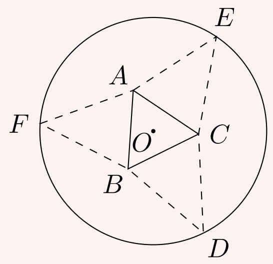
$$k+2=1+2+\cdots+2^{s-1}=2^s-1,$$

所以 $k=2^s-3\geqslant 14$ ，最小的 $s=5$ ，此时 $k=2^5-3=29$ ，对应最小的满足条件的

$$N=\frac{29\cdot 30}{2}+5=440.$$

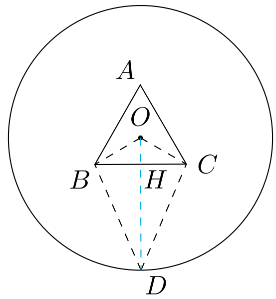
例题 2

(理 16) 如图，圆形纸片的圆心为 O ，半径为 5 cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O ． D,E,F 为圆 O 上的点， $\triangle DBC,\triangle ECA,\triangle FAB$ 分别是以 BC,CA,AB 为底边的等腰三角形，沿虚线剪开后，分别以 BC,CA,AB 为折痕折起 $\triangle DBC,\triangle ECA,\triangle FAB$ ，使得 D,E,F 重合，得到三棱锥．当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积 (单位： cm^3) 的最大值为________．



解析　$4\sqrt{15}$.

连接 OD ，交 BC 于 H ，如图.



设 $BC=2x$ ，则 $0<2x<5\sqrt{3}$ ，$OH=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ ，$DH=5-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ ．所以

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2x)^2\cdot\sqrt{\left(5-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{25-\frac{10x}{\sqrt{3}}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-x\right)}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot\frac{5}{2\sqrt{3}}\left(10\sqrt{3}-4x\right)}\\&\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\frac{10\sqrt{3}}{5}\right)^5}\\&=4\sqrt{15}.\end{aligned}$$

当 $x=2\sqrt{3}$ 时取等号.

例题 3

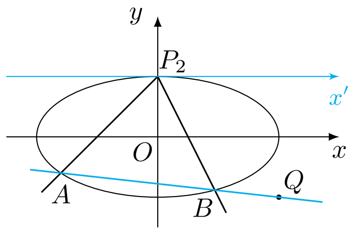
(理 20) 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，四点 $P_1(1,1)$ 、$P_2(0,1)$ 、$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A,B 两点．若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ，证明：l 过定点.

解析　*(1)* 根据椭圆的对称性，可知 P_2,P_3,P_4 在椭圆 C 上，所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 将坐标系向上平移一个单位，如图



椭圆方程化为

$$C': \frac{x'^2}{4}+(y'+1)^2=1,$$

即

$$\frac{1}{4}x'^2+y'^2+2y'=0,$$

设直线 l 对应的直线 l' 为 $mx'+ny'=1$，则化齐次联立，得

$$\frac{1}{4}x'^2+y'^2+2y'(mx'+ny')=0,$$

整理得

$$(2n+1)y'^2+2mx'y'+\frac{1}{4}x'^2=0,$$

结合两直线斜率之和为 -1，得

$$-\frac{2m}{2n+1}=-1,$$

即

$$2m-2n=1,$$

所以直线 l' 恒过点 $Q'(2,-2)$，在原坐标系中，直线 l 过点 $Q(2,-1)$．

例题 4

(理 21) 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的导函数为

$$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1).$$

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$；

当 $a>0$ 时，在区间 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上有 $f'(x)<0$，在区间 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有 $f'(x)>0$．

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增．

*(2)*分离变量　令 $f(x)=0$，即 $ae^{2x}+(a-2)e^x-x=0$，所以有

$$a=\frac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}.$$

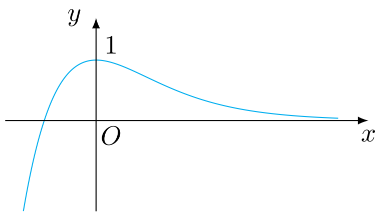
于是函数 $f(x)$ 有两个零点，即 $y=a$ 与 $g(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}$ 的图象有两个公共点.
函数 $g(x)$ 的导函数为

$$g'(x)=-\frac{(2\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x-1)}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^2},$$

当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$ 时，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值 $g(0)=1$，结合

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

函数 $g(x)$ 的图象如图.



情形一　当 $a\geqslant 1$ 时，$y=a$ 与 $g(x)$ 至多有一个公共点，不符合题意；
情形二　当 $a\leqslant 0$ 时，由于当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)>0$，而当 $x<0$ 时，$g(x)$ 单调递增，所以 $y=a$ 与 $g(x)$ 至多有一个公共点，不符合题意；
情形三　当 $0<a<1$ 时，一方面，由于

$$g(-2)<0<a, g(0)=1>a,$$

且 $g(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递增，所以 $y=a$ 与 $g(x)$ 在 $(-2,0)$ 上有且仅有一个公共点.
另一方面，取 $x_0=\ln\dfrac{3}{a}$，

$$g(x_0)=\frac{2\mathrm{e}^{x_0}+x_0}{\mathrm{e}^{2x_0}+\mathrm{e}^{x_0}}<\frac{3\mathrm{e}^{x_0}}{\mathrm{e}^{2x_0}}=\frac{3}{\mathrm{e}^{x_0}}=a,$$

所以在 $\left(0,\ln\dfrac{3}{a}\right)$ 上，有

$$g(0)>a,\ g\left(\ln\frac{3}{a}\right)<a.$$

且 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\ln\dfrac{3}{a}\right)$ 上单调递减，于是 $y=a$ 与 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\ln\dfrac{3}{a}\right)$ 上有且仅有一个交点.
综上，当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

不分离变量　由 *(1)* 知 $a>0$，此时 $f(x)$ 有极小值，也是最小值 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)$，要使得 $f(x)$ 有两个零点，需要

$$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a}+\ln a<0,$$

而函数 $g(x)=1-\dfrac{1}{x}+\ln x$ 单调递增，且 $g(1)=0$，所以 $a\in(0,1)$.
当 $a\in(0,1)$ 时，考虑函数 $f(x)$ 在 $x=\ln\dfrac{m}{a},m>0$ 处的函数值

$$f\left(\ln\frac{m}{a}\right)=a\left(\frac{m}{a}\right)^2+(a-2)\cdot\frac{m}{a}-\ln\frac{m}{a},$$

因为 $\ln\dfrac{m}{a}<\dfrac{m}{a}-1$，所以

$$f\left(\ln\frac{m}{a}\right)>\frac{m(m+a-3)}{a}+1.$$

当 $m=\dfrac{a}{3}$ 与 $m=3$ 时，由上面的不等式知

$$f\left(\ln\frac{1}{3}\right)>0, f\left(\ln\frac{3}{a}\right)>0,$$

而 $\ln\dfrac{1}{3}<\ln\dfrac{1}{a}<\ln\dfrac{3}{a}$，结合单调性知 $f(x)$ 有两个零点.

2　2017 年全国 I 卷文

例题 5

(文 12) 设 A,B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$，则 m 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$

B. $\left(0,\sqrt{3}\right]\cup[9,+\infty)$

C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$

D. $\left(0,\sqrt{3}\right]\cup[4,+\infty)$

解析　A.

根据椭圆的垂径定理的推论，可得直线 MA,MB 的斜率 k_1,k_2 满足

$$k_1\cdot k_2=-\frac{m}{3},$$

而 $\angle AMB=120^\circ$ 等价于直线 MA 与直线 MB 的夹角为 60°，从而

$$\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\sqrt{3},$$

也即

$$\left|k_1+\frac{m}{3k_1}\right|=\left|\sqrt{3}-\frac{m}{\sqrt{3}}\right|,$$

该方程有解即

$$\left|\sqrt{3}-\frac{m}{\sqrt{3}}\right|\geqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}},$$

也即

$$(3-m)^2\geqslant 4m,$$

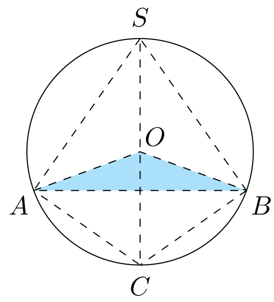
解得 m 的取值范围是 $(0,1]\cup[9,+\infty)$.

例题 6

(文 16) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径．若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，则球 O 的表面积为________.

解析　36π.

如图，连接 OA,OB .



根据题意，三角形 SAC,SBC 均为等腰直角三角形，而 O 为斜边 SC 的中点，因此 OA,OB,OS 两两垂直．设球 O 的半径为 r ，则三棱锥 $S-ABC$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle OAB}\cdot SC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}r^2\cdot 2r=\frac{1}{3}r^3=9,$$

解得 $r=3$ ，因此球 O 的表面积 $S=4\pi r^2=36\pi$.

例题 7

(文 20) 设 A,B 为曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点， A 与 B 的横坐标之和为 4 .

(1) 求直线 AB 的斜率；

(2) 设 M 为曲线 C 上一点， C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM\perp BM$ ，求直线 AB 的方程.

解析　*(1)* 设 $A\left(4a,4a^2\right)$ ， $B\left(4b,4b^2\right)$ ，则根据题意，有

$$a+b=1.$$

而直线 AB 的斜率为

$$\frac{4a^2-4b^2}{4a-4b}=a+b=1.$$

(2) 设切线方程为 $y=x+b_0$ ，与曲线 $C:x^2=4y$ 联立，得

$$x^2-4x-4b_0=0,$$

因此 M 点的横坐标为 A,B 的横坐标的平均数，进而 $M(2,1)$. 将坐标系按向量 $(2,1)$ 平移，则抛物线方程变为

$$C':(x'+2)^2=4(y'+1),$$

即

$$x'^2+4x'-4y'=0.$$

设新坐标系下直线 $A'B'$ 的方程为 $m(x'-y')=1$ ，则化齐次联立可得

$$x'^2+(4x'-4y')\cdot m\left(x'-y'\right)=0,$$

由于此时 $A'M' \perp B'M'$，因此
$$1+4m+4m=0,$$
解得 $m=-\dfrac{1}{8}$，直线 $A'B':x'-y'+8=0$．回到原坐标系，直线 AB 的方程为
$$(x-2)-(y-1)+8=0,$$
即 $x-y+7=0$．

例题 8

(文 21) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)-a^2x$．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围．

解析　*(1)* 设 $g(x)=x^2-ax-a^2\ln x$，则 $f(x)=g\left(\mathrm{e}^x\right)$，可以看成是函数 $g(x)$ 和指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的复合函数．函数 $g(x)$ 的导函数
$$g'(x)=\frac{(2x+a)(x-a)}{x},$$
因此当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增．考虑到函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数，因此当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增；当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增．

(2) 情形一　$a<0$．此时 $f(x)\geqslant 0$ 等价于
$$g\left(-\frac{a}{2}\right)=a^2\left[\frac{3}{4}-\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]\geqslant 0,$$
解得 $-2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}\leqslant a<0$．

情形二　$a=0$．此时 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$，符合题意．

情形三　$a>0$．此时 $f(x)\geqslant 0$ 等价于
$$g(a)=-a^2\ln a\geqslant 0,$$
解得 $0<a\leqslant 1$．

综上所述，a 的取值范围是 $\left[-2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}},1\right]$．

3　2017 年全国 II 卷理

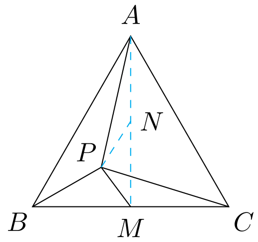
例题 9

(理 12) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 ( )

A. -2　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. -1

解析　答案为 B.

取 BC 中点，记为 M，取 AM 中点，记为 N，如图，



则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)&=\overrightarrow{PA}\cdot 2\overrightarrow{PM}\\&=2\left(PN^2-\frac{1}{4}AM^2\right)\\&\geqslant 2\cdot\left[0-\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right]\\&=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

当且仅当 P 与 N 重合时，取得等号.

例题 10

(理 16) 已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N，若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$________.

解析　由题意得 $F(2,0)$，设 $N(0,n)$，由点 M 是 FN 的中点，则点 M 的横坐标为 1，代入抛物线得 $M(1,\pm2\sqrt{2})$，因此 $N(0,\pm4\sqrt{2})$，故

$$|FN|=\sqrt{2^2+\left(\pm4\sqrt{2}\right)^2}=6.$$

也可以由抛物线的定义得到

$$|FN|=2|FM|=2[1-(-2)]=6.$$

例题 11

(理 20) 设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

解析　(1) 设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$，可得 $M\left(x,\dfrac{\sqrt{2}}{2}y\right)$，因为 M 在椭圆 C 上，所以 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=2$.

(2) 设 $P(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$ ， $Q(-3,m)$ ， 由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$ 可得

$$(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)\cdot(-3-\sqrt{2}\cos\theta,m-\sqrt{2}\sin\theta)=1,$$

故有

$$\sqrt{2}m\sin\theta-3\sqrt{2}\cos\theta=3.$$

左焦点 $F(-1,0)$ ， 故只需证明 $PF\perp OQ$ ， 即证

$$(-1-\sqrt{2}\cos\theta,-\sqrt{2}\sin\theta)\cdot(-3,m)=0,$$

也即证

$$3+3\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}m\sin\theta=0,$$

因此命题得证. 故过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

例题 12

(理 21) 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$ ， 且 $f(x)\geqslant 0$.

(1) 求 a ;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 ， 且 $\mathrm{e}^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

解析　(1) $f(x)\geqslant 0$ 等价于

$$a(x-1)-\ln x\geqslant 0.$$

记左边的函数为 $\varphi(x)$:

情形一　$a\leqslant 0$. 此时 $\varphi(2)<0$ ， 不符合题意;

情形二　$0<a<1$. 此时有

$$\varphi'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x},$$

则在 $\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$ 上， $\varphi'(x)<0$ ， 而 $\varphi(1)=0$ ， 所以

$$\varphi(x)<\varphi(1)=0,$$

不符合题意;

情形三　$a=1$. 此时 $\ln x\leqslant x-1$ ， 符合题意;

情形四　$a>1$. 此时在 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 上， $\varphi'(x)>0$ ， 而 $\varphi(1)=0$ ， 所以

$$\varphi(x)<\varphi(1)=0,$$

矛盾;

综上所述， a 的值为 1 .

(2) 由 (1) 知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=2x-2-\ln x, f''(x)=2-\frac{1}{x},$$

所以 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增．而

$$\begin{aligned} f'\left(\mathrm{e}^{-2}\right)&=2\mathrm{e}^{-2}>0,\\ f'\left(\frac{1}{2}\right)&=\ln 2-1<0, \end{aligned}$$

因此函数 $f'(x)$ 在 $\left(\mathrm{e}^{-2},\frac{1}{2}\right)$ 上存在唯一零点 x_0，且函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值．
一方面，$f(x)$ 在 (e^{-2},x_0) 上单调递增，从而有

$$f(x_0)>f(\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-4}>\mathrm{e}^{-2}.$$

另一方面，因为 $2x_0-2-\ln x_0=0$，且 $x_0<\frac{1}{2}$，所以

$$f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0(2x_0-2)=-x_0^2+x_0<\frac{1}{4}.$$

综上所述，原命题得证．

4　2017 年全国 II 卷文

例题 13

(文 12) 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴的上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN\perp l$，则 M 到直线 NF 的距离为（　　）

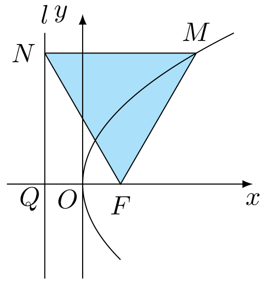
A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

解析　C.

根据抛物线的定义，有 $MN=MF$，又有 $\angle NMF=60^\circ$，因此 $\triangle MNF$ 是等边三角形．设 l 与 x 轴的公共点为 Q，则该等边三角形的边长

$$NF=2FQ=4,$$

因此所求 M 到直线 NF 的距离，即等边三角形的高，为 $2\sqrt{3}$．



例题 14

(文 16) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $B=$________.

解析　$\dfrac{\pi}{3}$.

根据正弦定理，有

$$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin B,$$

从而 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$.

例题 15

(文 20) 设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 设点 Q 在 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

解析　同理 *20*.

例题 16

(文 21) 设函数 $f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，求 a 的取值范围.

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^x\left(-x^2-2x+1\right)=-\mathrm{e}^x\left(x+1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right),$$

于是函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2) 设函数 $\varphi(x)=ax+1-\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^x$，则其导函数

$$\varphi'(x)=a+\mathrm{e}^x\left(x^2+2x-1\right),$$

考虑到 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=a-1$，得到讨论分界点 $a=1$.

情形一　$a<1$. 此时函数 $\varphi'(x)$ 的导函数

$$\varphi''(x)=\mathrm{e}^x\left(x^2+4x+1\right)>0,$$

因此函数 $\varphi'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，考虑到

$$\varphi'(0)=a-1<0,$$
$$\varphi'\left(|a|+1\right)>0,$$

因此函数 $\varphi'(x)$ 在区间 $(0,|a|+1)$ 上有唯一零点，记为 x_0 . 在区间 $(0,x_0)$ 上，有 $\varphi'(x)<0$, 结合 $\varphi(0)=0$, 可得 $\varphi(x)<0$ ，不符合题意.

情形二　$a\geqslant 1$. 此时

$$\varphi(x)\geqslant x+1-\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^x=(x+1)\left(1+(x-1)\mathrm{e}^x\right).$$

设函数 $\mu(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ ，则其导函数

$$\mu'(x)=x\mathrm{e}^x,$$

因此 $\mu(x)$ 的极小值，亦为最小值为 $\mu(0)=-1$ ，从而

$$\forall x\geqslant 0, 1+(x-1)\mathrm{e}^x\geqslant 0,$$

因此有 $\varphi(x)\geqslant 0$ ，符合题意.

综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

5　2017 年全国 III 卷理

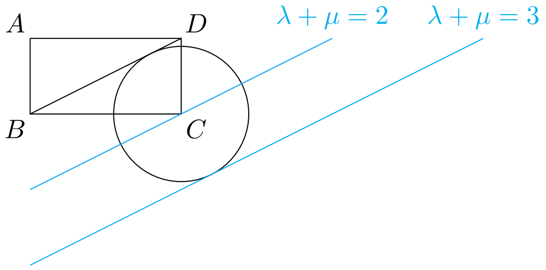
例题 17

(理 12) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$ ，$AD=2$ ，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$ ，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为（　　）

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

解析　A.

如图，考虑向量线性分解的等系数和线，可得 $\lambda+\mu$ 的最大值为 3 .



例题 18

(理 16) a,b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a,b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论；

(1) 当直线 AB 与 a 成 60° 角时，AB 与 b 成 30° 角；

(2) 当直线 AB 与 a 成 60° 角时，AB 与 b 成 60° 角；

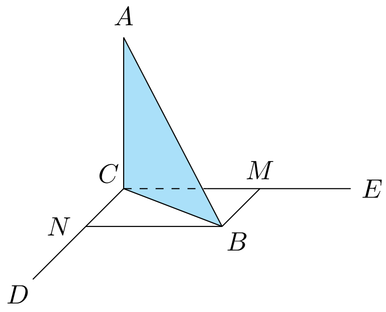
(3) 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45° ；

(4) 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60° .

其中正确的是________.

解析　$(2)(3)$.

如图，设 CD 为直线 a，CE 为直线 b，过 B 分别作 a,b 的平行线 BM,BN，设 $\angle CBM=\theta$，直线 AB 与直线 a,b 所成的角分别为 α,β.



根据三射线定理，有
$$\cos\alpha=\cos\angle ABM=\cos\angle CBA\cdot\cos\angle CBM=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\theta,$$
类似的，有
$$\cos\beta=\cos\angle ABN=\cos\angle CBA\cdot\cos\angle CBN=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\theta,$$
据此易得命题 (2)(3) 正确.

注　直线 AB 与直线 a,b 所成的角分别为 α,β，三射线定理部分也可以通过建系解决，令 $\vec{a}=(1,0,0),\vec{b}=(0,1,0)$，则可以取 $C(0,0,0),A(0,0,1)$，则点 B 可以设为 $(\cos\theta,\sin\theta,0)$，于是 $\overrightarrow{AB}=(\cos\theta,\sin\theta,-1)$，从而有
$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=\cos\theta=\sqrt{2}\cos\alpha,\overrightarrow{AB}\cdot\vec{b}=\sin\theta=\sqrt{2}\cos\beta.$$
以下同上.

例题 19

(理 20) 已知抛物线 $C:y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

(1) 证明：坐标原点 O 在圆 M 上；

(2) 设圆 M 过点 $P(4,-2)$，求直线 l 与圆 M 的方程.

解析　(1) 设 $A(2a^2,2a)$，$B(2b^2,2b)$，则
$$\frac{2a^2\cdot 2b-2b^2\cdot 2a}{2b-2a}=-2ab=2,$$
即 $ab=-1$，因此
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2a^2\cdot 2b^2+2a\cdot 2b=4ab(ab+1)=0,$$
因此命题得证.

(2) 根据题意，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(2a^2-4)(2b^2-4)+(2+2a)(2+2b)\\&=4a^2b^2-8(a^2+b^2)+4ab+4(a+b)+20\\&=-8\left[(a+b)^2-2ab\right]+4(a+b)+20\\&=-8(a+b)^2+4(a+b)+4\\&=0,\end{aligned}$$

解得 $a+b=1$ 或 $a+b=-\dfrac{1}{2}$. 而直线 l 的方程为

$$x=\frac{2a^2-2b^2}{2a-2b}y+2,$$

即

$$x=(a+b)y+2,$$

圆 M 的圆心坐标为 $\left(a^2+b^2,a+b\right)$ ，因此当 $a+b=1$ 时，直线 l 的方程为 $y=x-2$ ，圆 M 的圆心坐标为 $(3,1)$ ，圆 M 的方程为

$$(x-3)^2+(y-1)^2=10.$$

当 $a+b=-\dfrac{1}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $y=-2x+4$ ，圆 M 的圆心坐标为 $\left(\dfrac{9}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$ ，圆 M 的方程为

$$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}.$$

例题 20

(理 21) 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$ ，求 a 的值;

(2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n ，有

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m,$$

求 m 的最小值.

解析　*(1)* 当 $a\leqslant 0$ 时，有

$$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-1}-1+a<0,$$

不符合题意;

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{x-a}{x},$$

于是在区间 $(a,1)$ 上，函数 $f(x)$ 单调递增，而 $f(1)=0$ ，因此在该区间上 $f(x)<0$ ，不符合题意;

当 $a=1$ 时，容易证明 $x-1-\ln x\geqslant 0$ ，符合题意;

当 $a>1$ 时，在区间 $(1,a)$ 上，函数 $f(x)$ 单调递减，而 $f(1)=0$，因此在该区间上 $f(x)<0$，不符合题意.
综上所述，a 的值为 1.
(2) 一方面，当 $n=3$ 时，有
$$LHS=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{135}{64},$$
于是 $m\geqslant 3$.
另一方面，有
$$\begin{aligned}\ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]&=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\\&<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\&=1-\frac{1}{2^n}\\&<1,\end{aligned}$$
因此有
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e},$$
因此 m 可以取到 3.
综上所述，m 的最小值为 3.

6　2017 年全国 III 卷文

例题 21
(文 12) 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1})$ 有唯一的零点，则 $a=$ (　　)
A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

解析　*C.*
函数 $f(x)=-1+(x-1)^2+a\left[\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}\right]$ 满足
$$f(1-x)=f(1+x),$$
因此函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称. 根据题意，$x=1$ 为函数 $f(x)$ 的零点，从而
$$f(1)=-1+2a=0,$$
解得 $a=\dfrac{1}{2}$.
事实上，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，有
$$-1+(x-1)^2+\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}\right]\geqslant 0,$$
等号当且仅当 $x=1$ 时取得，因此 $a=\dfrac{1}{2}$ 符合题意.

例题 22

(文 16) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是 ________ .

解析　$\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数，所以 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 也是增函数，考虑方程

$$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=1$$

的解即可.

当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{1}{2}>-1$ ，从而有 $f(x)>1$ ，$f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>0$ ，因此方程

$$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=1$$

在 $(0,+\infty)$ 上无解. 当 $x\leqslant 0$ 时，方程即

$$x+1+x+\frac{1}{2}=1,$$

解得 $x=-\dfrac{1}{4}$ ，于是题中不等式的解集为 $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

例题 23

(文 20) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A ，B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$ ，当 m 变化时，解答下列问题：

(1) 能否出现 $BC\perp AC$ 的情况？说明理由；

(2) 证明过 A ，B ，C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

解析　圆幂定理

(1) 若 $BC\perp AC$ ，根据射影定理，有

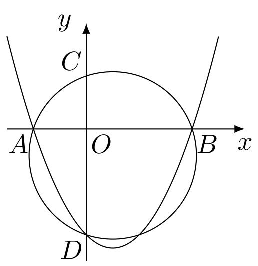
$$OC^2=OA\cdot OB=1.$$

而根据韦达定理，有

$$OA\cdot OB=2,$$

因此不可能出现 $BC\perp AC$ 的情况.

(2) 如图，设 $D(0,-2)$.



根据圆幂定理，有

$$OA\cdot OB=OC\cdot OD=2,$$

于是过 A,B,C 三点的圆在 y 轴截得的弦恒为 CD，其长度为定值 3．

交点曲线系

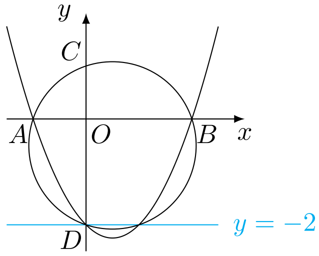
(1) 考虑到 A,B,D 是曲线 $x^2+mx-2-y=0$ 和曲线 $y(y+2)=0$ 的公共点，因此 $\triangle ABD$ 外接圆 K 的方程为

$$x^2+mx-2-y+y(y+2)=0,$$

即

$$x^2+y^2+mx+y-2=0,$$

该圆恒过点 $C(0,1)$，因此若 $BC\perp AC$，则 AB 为圆 K 的直径，此时圆 K 关于 x 轴对称，但它与 y 轴的公共点为 $D(0,-2)$ 和 $C(0,1)$ 不对称，矛盾．这就意味着不可能出现 $BC\perp AC$ 的情况．



(2) 由第 (1) 小题结论，可得 $\triangle ABC$ 的外接圆与 y 轴的公共点为 $D(0,-2)$ 和 $C(0,1)$，因此被 y 轴截得的弦长为定值 3．

例题 24

(文 21) 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $a<0$ 时，证明：$f(x)\leqslant -\dfrac{3}{4a}-2$．

解析　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{(2ax+1)(x+1)}{x},$$

于是当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减；当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

(2) 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的极大值，亦为最大值是

$$f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a},$$

于是问题等价于证明

$$\forall a<0,\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a}\leqslant -\frac{3}{4a}-2,$$

即

$$\forall x>0,\ln x\leqslant x-1,$$

这显然成立，于是原命题得证.

7　2017 年北京卷理

例题 25

(理 8) 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}，则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是 (　　)(参考数据 $\lg 3 \approx 0.48$)

A. 10^{33}　　B. 10^{53}　　C. 10^{73}　　D. 10^{93}

解析　D.

考虑到
$$M \approx 3^{361} = 10^{361\lg 3} \approx 10^{173.28} \approx N \cdot 10^{93.28},$$
因此选项 D 符合题意.

事实上，有
$$10^{93} - \frac{3^{361}}{10^{80}} > \frac{3^{361}}{10^{80}} - 10^{73} > 0,$$
因此在“精确”的数值上，$\dfrac{M}{N}$ 更接近 10^{73}. 但在实际生活中，在估算很大的数的时往往估计其数量级 (否则有效数字稍有变动，得到的结果就会产生很大波动)，而且即便是估计数量级，得到的结果往往仍有很大误差.

注　上述不等式的证明如下. 首先，计算 3 的方幂

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^n	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

这个表可以用来估算 $\lg 3$，比如从表中有
$$10^4 < 3^{10} < 10^5,$$
于是有
$$0.4 = \frac{4}{10} < \lg 3 < 0.5 < \frac{5}{10},$$
类似的，还可得到
$$0.45 = \frac{9}{20} < \lg 3 < \frac{10}{20} = 0.5$$
这样就证明了 $\lg 3 > 0.45 > \dfrac{153}{361}$，即 $\dfrac{3^{361}}{10^{80}} - 10^{73} > 0$.

接下来证明
$$10^{93} - \frac{3^{361}}{10^{80}} > \frac{3^{361}}{10^{80}} - 10^{73},$$
即
$$10^{173} + 10^{153} > 2 \cdot 3^{361},$$
也即
$$3^{361} < 2^{172} \cdot 5^{173} + 2^{152} \cdot 5^{153}.$$

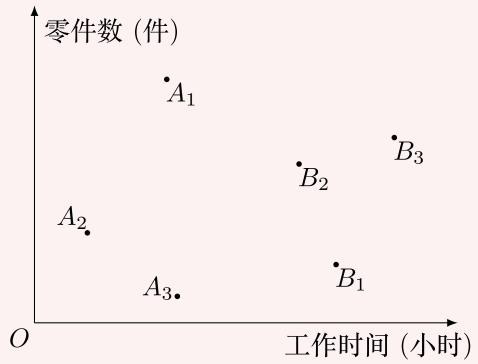
注意到 $3^9<2\cdot 10^4=2^5\cdot 5^4$，于是

$$\frac{2^{172}\cdot 5^{173}}{3^{361}}>\frac{2^{172}\cdot 5^{173}}{3\cdot 2^{200}\cdot 5^{160}}=\frac{5^{13}}{3\cdot 2^{28}}=\left(\frac{625}{512}\right)^3\cdot\frac{5}{6}>\left(\frac{6}{5}\right)^3\cdot\frac{5}{6}>1,$$

因此不等式得证.

例题 26

(理 14) 三名工人加工同一种零件，他们在一天中的工作情况如图所示，其中点 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数，点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数，$i=1,2,3$.



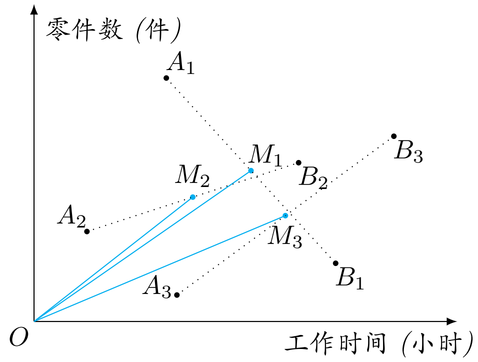
(1) 记 Q_i 为第 i 名工人在这一天加工的零件总数，则 Q_1,Q_2,Q_3 中最大的是________；

(2) 记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数，则 p_1,p_2,p_3 中最大的是________.

解析　(1) Q_1；(2) p_2 .

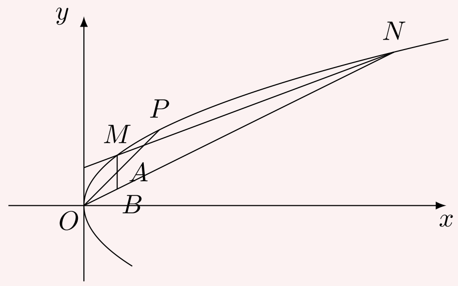
(1) 比较线段 A_iB_i 的中点 M_i 的纵坐标大小即可;

(2) 比较直线 OM_i 的斜率大小即可.



例题 27

(理 18) 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 过点 $P(1,1)$，过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M,N . 过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP,ON 交于点 A,B，其中 O 为原点.



(1) 求抛物线 C 的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

(2) 求证：A 为线段 BM 的中点．

解析　(1) 根据题意可得 $p=\dfrac{1}{2}$，于是抛物线 C 的方程为 $y^2=x$，焦点坐标为 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，准线方程为 $x=-\dfrac{1}{4}$．

(2) 设 $M(m^2,m)$，$N(n^2,n)$，则

$$\frac{m^2\cdot n-n^2\cdot m}{m^2-n^2}=\frac{1}{2},$$

即

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2.$$

此时 $A\left(m^2,m^2\right)$，$B\left(m^2,\dfrac{m^2}{n}\right)$，因此 A 为线段 BM 的中点即

$$m+\frac{m^2}{n}=2m^2,$$

这显然成立，原命题得证．

例题 28

(理 19) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$．

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值．

解析　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-1,$$

于是所求的切线方程为

$$y=f'(0)x+f(0),$$

即 $y=1$．

(2) 函数 $f'(x)$ 的导函数

$$f''(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x,$$

于是在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，$f''(x)\leqslant 0$，$f'(x)$ 单调递减；又 $f'(0)=0$，于是 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减．因此函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f(0)=1$，最小值为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$．

例题 29

(理 20) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，记

$$c_n=\max\{b_1-a_1n,b_2-a_2n,\cdots,b_n-a_nn\},$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$ ， $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 这 s 个数中最大的数．

(1) 若 $a_n=n$ ， $b_n=2n-1$ ，求 c_1,c_2,c_3 的值，并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列；

(2) 证明：或者对任意正数 M ，存在正整数 m ，当 $n\geqslant m$ 时， $\dfrac{c_n}{n}>M$ ；或者存在正整数 m ，使得

$$c_m,c_{m+1},c_{m+2},\cdots$$

是等差数列．

解析　*(1)* 根据定义，有

$$\begin{aligned}&c_1=b_1-a_1=0,\\&c_2=\max\{b_1-2a_1,b_2-2a_2\}=\max\{-1,-1\}=-1,\\&c_3=\max\{b_1-3a_1,b_2-3a_2,b_3-3a_3\}=\max\{-2,-3,-4\}=-2.\end{aligned}$$

事实上，设 $x_k=2k-1-kn$ ，则有

$$c_n=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

当 $n\geqslant 2$ ，且 $k=2,3,\cdots,n$ 时，有

$$x_k-x_{k-1}=2-n\leqslant 0,$$

于是

$$c_n=x_1=1-n,$$

结合 $c_1=0$ ，因此数列 $\{c_n\}$ 是等差数列．

(2) 不妨设 $a_n=a_0+nd_1$ ， $b_n=b_0+nd_2$ ，其中 $n\in\mathbb{N}^*$ ．考虑

$$x_k=b_0+kd_2-(a_0+kd_1)n=(b_0-a_0n)+(d_2-d_1n)k,$$

这是关于 k 的等差数列，因此

$$c_n=\max\{c_1,c_n\}=\max\{b_1-a_1n,b_0+(d_2-a_0)n-d_1n^2\}.$$

考虑函数 $f(x)=b_1-a_1x$ 和函数 $g(x)=b_0+(d_2-a_0)x-d_1x^2$ ，分类讨论如下．

情形一　$d_1\neq 0$ ．此时 $f(x)$ 的图象是直线， $g(x)$ 的图象是抛物线，无论直线与抛物线的位置关系如何，必然存在正整数 m_0 ，使得

$$\forall x\geqslant m_0,\max\{f(x),g(x)\}=f(x),$$

或

$$\forall x\geqslant m_0,\max\{f(x),g(x)\}=g(x).$$

当 $\forall x \geqslant m_0, \max\{f(x), g(x)\} = f(x)$ 时，取 $m = m_0$ ，有

$$c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$$

是等差数列；而当 $\forall x \geqslant m_0, \max\{f(x), g(x)\} = g(x)$ 时，必然有 $g(x)$ 开口向上，即 $-d_1 > 0$ ，因此

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{b_0}{x} - d_1 x + (d_2 - a_0),$$

对任意正数 M ，必然存在正整数 m_1 ，使得当 $x \geqslant m_1$ 时，有

$$\frac{g(x)}{x} > M,$$

此时取 $m = \max\{m_0, m_1\}$ ，可得当 $n \geqslant m$ 时，$\dfrac{c_n}{n} > M$.

情形二　$d_1 = 0$. 此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象都是直线，无论这两条直线位置关系如何，必然存在正整数 m ，使得

$$\forall x \geqslant m, \max\{f(x), g(x)\} = f(x),$$

或

$$\forall x \geqslant m, \max\{f(x), g(x)\} = g(x),$$

这就意味着

$$c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$$

是等差数列.

综上所述，原命题得证.

8　2017 年北京卷文

例题 30

(文 8) 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361} ，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80} ，则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是（　　）

（参考数据：$\lg 3 \approx 0.48$ ）

A. 10^{33}　　B. 10^{53}　　C. 10^{73}　　D. 10^{93}

解析　同理 8.

例题 31

(文 14) 某学习小组由学生和教师组成，人员构成同时满足以下三个条件：

(1) 男学生人数多于女学生人数；

(2) 女学生人数多于教师人数；

(3) 教师人数的两倍多于男学生人数.

①若教师人数为 4 ，则女学生人数的最大值为________；

②该小组人数的最小值为________.

解析　6；12.

设学习小组的老师，女学生，男学生数分别为 a,b,c，则根据题意，有

$$a<b<c<2a.$$

若 $a=4$，则 $4<b<c<8$，于是 $c\leqslant 7$，$b\leqslant c-1\leqslant 6$．当 $(a,b,c)=(4,6,7)$ 时，$b=6$，因此所求最大值为 6．

由于 a 和 $2a$ 之间至少有两个整数，因此 $2a-a\geqslant 3$，$a\geqslant 3$．而

$$a+b+c\geqslant a+(a+1)+(a+2)=3a+3\geqslant 12,$$

当 $(a,b,c)=(3,4,5)$，$a+b+c=12$，因此所求的最小值为 12．

例题 32

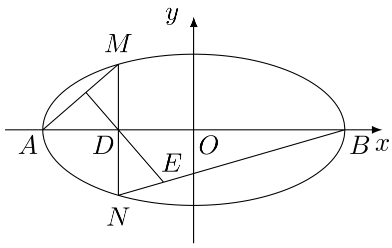
(文 19) 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$．焦点在 x 轴上，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 点 D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M,N．过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E．求证：$\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$．

解析　*(1)* 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) 如图．



设 $D(2\cos\theta,0)$，$M(2\cos\theta,\sin\theta)$，$N(2\cos\theta,-\sin\theta)$．取线段 BN 的一个 5 等分点 E' ($\overrightarrow{BE}=4\overrightarrow{EN}$)，则 E' 的坐标为

$$\left(\frac{2+8\cos\theta}{5},\frac{-4\sin\theta}{5}\right),$$

进而

$$\overrightarrow{E'D}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2\cos\theta-2}{5},\frac{4\sin\theta}{5}\right)\cdot(2\cos\theta+2,\sin\theta)=0,$$

因此 $DE'\perp AM$，进而 $E'=E$，可得 $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BDN}}=\frac{BE}{BN}=\frac{BE'}{BN}=\frac{4}{5},$$

命题得证．

例题 33

(文 20) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

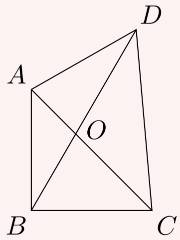
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

解析　同理 19.

9　2017 年浙江卷

例题 34

(题 10) 如图，已知平面四边形 $ABCD$ ，$AB\perp BC$ ，$AB=BC=AD=2$ ，$CD=3$. AC 与 BD 交于点 O ，记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ ，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ ，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ ，则 (　　)

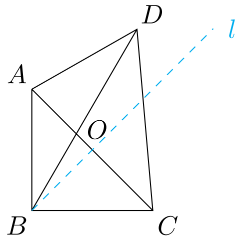


A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_1<I_3<I_2$

C. $I_3<I_1<I_2$　　D. $I_2<I_1<I_3$

解析　C.

如图，作线段 AC 的垂直平分线 l .



由于 $DA<DC$ ，因此 A,D 在直线 l 同侧，进而 $OA<OC$ ，$\angle ABO<45^\circ$ ，进而

$$\angle AOD=\angle ABO+\angle BAO<90^\circ,$$

在等腰三角形 ABD 中，$OB<OD$. 这样就有

$$I_3=|OC|\cdot|OD|\cdot\cos\angle COD<|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB=I_1<0<I_2.$$

例题 35

(题 17) 已知 $a\in\mathbb{R}$ ，函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值是 5 ，则 a 的取值范围是________.

解析　$\left(-\infty,\dfrac{9}{2}\right]$．

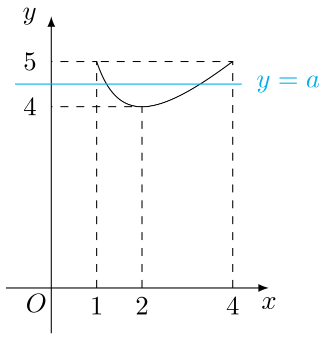
考虑到

$$f(x)=|g(x)-a|+a$$

即

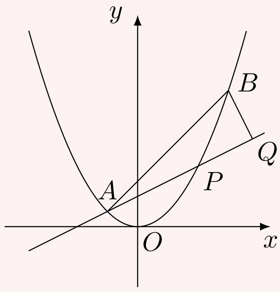
$$f(x)=\begin{cases}2a-g(x), & g(x)<a,\\ g(x), & g(x)\geqslant a,\end{cases}$$

其几何意义为将函数 $g(x)$ 的图象在直线 $y=a$ 下方的部分翻折到直线 $y=a$ 上方．结合函数 $g(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $[1,4]$ 上的图象，可得 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{9}{2}\right]$．



例题 36

(理 21) 如图，已知抛物线 $x^2=y$，点 $A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$，$B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$，抛物线上的点 $P(x,y)\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right)$．过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q．



(1) 求直线 AP 斜率的取值范围；

(2) 求 $|PA|\cdot|PQ|$ 的最大值．

解析　(1) 直线 AP 的斜率

$$k=\frac{x^2-\dfrac{1}{4}}{x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=x-\frac{1}{2},$$

取值范围为 $(-1,1)$．

(2) 根据题意，有

$$\begin{aligned}
|PA|\cdot|PQ| &= -\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}\\
&= -\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{4}-x^2\right)\\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)\left[1+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+x\right)\right]\\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2}-x\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2}-3x\right)\\
&\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3x+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}-3x}{4}\right)^4\\
&= \frac{27}{16},
\end{aligned}$$

等号当且仅当 $x=1$ 时取得．因此所求的最大值为 $\dfrac{27}{16}$ ．

例题 37

(理 22) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1$ ，$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\,(n\in\mathbb{N}^*)$．证明：当 $n\in\mathbb{N}^*$ 时，

(1) $0<x_{n+1}<x_n$ ；

(2) $2x_{n+1}-x_n\leqslant\dfrac{x_nx_{n+1}}{2}$ ；

(3) $\dfrac{1}{2^{n-1}}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n-2}}$ ．

解析　*(1)* 先证明 $x_n>0,n\in\mathbb{N}^*$ ，用数学归纳法．当 $n=1$ 时，命题显然成立．设当 $n=k$ ，$k\in\mathbb{N}^*$ 时命题成立，即 $x_k>0$ ，则考虑到函数

$$f(x)=x+\ln(1+x)$$

是单调递增函数，且有 $f(0)=0,x_n=f(x_{n+1})$ ，所以

$$f(0)<x_k=f(x_{k+1})<x_k+\ln(1+x_k)=f(x_k),$$

由单调性知 $0<x_{k+1}<x_k$ ，因此命题对 $n=k+1$ 也成立，且 $0<x_{n+1}<f(x_{n+1})=x_n$ ．

(2) 即证明

$$x_n\geqslant\frac{2x_{n+1}}{1+\frac{1}{2}x_{n+1}},$$

也即

$$x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\geqslant\frac{4x_{n+1}}{2+x_{n+1}},$$

等价于

$$\ln(1+x_{n+1})\geqslant\frac{2x_{n+1}-x_{n+1}^2}{2+x_{n+1}}.$$

我们熟知当 $x>0$ 时，有

$$\ln(1+x)>\frac{2x}{2+x},$$

因此

$$\ln(1+x_{n+1})>\frac{2x_{n+1}}{2+x_{n+1}}>\frac{2x_{n+1}-x_{n+1}^2}{2+x_{n+1}},$$

原命题得证.

(3) 我们熟知 $\ln x\leqslant x-1$，因此有

$$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\leqslant 2x_{n+1},$$

于是

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\frac{1}{2},$$

这样就有

$$\frac{x_n}{x_1}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x_{k+1}}{x_k}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

左边不等式成立.

根据第 *(2)* 小题结论，我们有

$$\frac{2}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2},$$

考虑不动点，有

$$\frac{\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{2}}\geqslant 2,$$

因此可得

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\geqslant 2^{n-2},$$

从而

$$x_n\leqslant\frac{1}{2^{n-2}+\dfrac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2^{n-2}},$$

右边不等式成立.

综上所述，原命题得证.

10　2017 年江苏卷

例题 38

(题 14) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上且周期为 1 的函数，在区间 $[0,1)$ 上，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in D,\\ x, & x\notin D,\end{cases}$ 其中集合 $D=\left\{x\mid x=\dfrac{n-1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$，则方程 $f(x)-\lg x=0$ 的解的个数是________.

解析　8 .

先证明引理：$10^{\frac{p}{q}}\neq k-\dfrac{1}{n}$，其中 $p,q\in\mathbb{N}^*$ 且 $(p,q)=1$，$k,n\in\mathbb{N}^*$．否则

$$10^p=\left(\frac{nk-1}{n}\right)^q,$$

左边是整数，而右边不是整数，矛盾．

原方程即

$$f(x)-\lg(x+k)=0,$$

其中 $k\in\mathbb{Z}$，$x\in[0,1)$．该方程即

$$k=10^{f(x)}-x.$$

根据引理，当 $x\in D$ 时，该方程有唯一解 $x=0$（此时 $k=1$）；当 $x\notin D$ 时，由于函数 $y=10^x-x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，因此根据引理，当 $k=2,3,4,5,6,7,8$ 时，该方程均有唯一解．

综上所述，题中方程的解的个数为 8．

例题 39

(题 19) 对于给定的正整数 k，若数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$$

对任意正整数 $n\,(n>k)$ 总成立，则称数列 $\{a_n\}$ 是 $P(k)$ 数列．

(1) 证明：等差数列 $\{a_n\}$ 是 $P(3)$ 数列；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 既是 $P(2)$ 数列，又是 $P(3)$ 数列，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列．

解析　*(1)* 对于等差数列 $\{a_n\}$，当 $n>3$ 时，有

$$a_{n-3}+a_{n+3}=a_{n-2}+a_{n+2}=a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n,$$

于是

$$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=2\cdot 3a_n,$$

因此 $\{a_n\}$ 是 $P(3)$ 数列．

(2) 根据题意，当 $n>2$ 时，有

$$\begin{aligned}4a_n&=a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2},\\4a_{n+2}&=a_n+a_{n+1}+a_{n+3}+a_{n+4},\\6a_{n+1}&=a_{n-2}+a_{n-1}+a_n+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4},\end{aligned}$$

因此

$$4a_n+4a_{n+2}-6a_{n+1}=2a_{n+1},$$

也即

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n,$$

因此数列 $\{a_n\}$ 从第 3 项起为等差数列．设数列

$$a_n : a_1, a_2, a_3, a_3 + d, a_3 + 2d, a_3 + 3d, \cdots,$$

则有

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) = 4a_3, \\ a_2 + a_3 + (a_3 + 2d) + (a_3 + 3d) = 4(a_3 + d), \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1 = a_3 - 2d, \\ a_2 = a_3 - d, \end{cases}$$

这样就证明了数列 $\{a_n\}$ 是等差数列．

例题 40

(题 20) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ($a > 0$ ， $b \in \mathbb{R}$) 有极值，且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点．(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)．

(1) 求 b 关于 a 的函数关系式，并写出定义域；

(2) 证明： $b^2 > 3a$ ；

(3) 若 $f(x), f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\dfrac{7}{2}$ ，求 a 的取值范围．

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,$$

函数 $f(x)$ 有极值，因此

$$\Delta = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot b = 4a^2 - 12b > 0.$$

函数 $f'(x)$ 的导函数

$$f''(x) = 6x + 2a,$$

于是 $f'(x)$ 的极值点为 $x = -\dfrac{a}{3}$ ．根据题意，有

$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + 1 = 0,$$

即

$$b = \frac{2}{9}a^2 + \frac{3}{a},$$

这样就有

$$4a^2 - 12 \cdot \left(\frac{2}{9}a^2 + \frac{3}{a}\right) > 0,$$

解得 $a > 3$ ．因此 b 关于 a 的函数关系式为

$$b = \frac{2}{9}a^2 + \frac{3}{a}, a \in (3, +\infty).$$

(2) 根据第 *(1)* 小题的结果，只需要证明当 $a>3$ 时，有

$$\left(\frac{2}{9}a^2+\frac{3}{a}\right)^2>3a.$$

由均值不等式，有

$$LHS=\left(\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{3}{a}\right)^2\geqslant\left[3\left(\frac{a^2}{9}\cdot\frac{a^2}{9}\cdot\frac{3}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2=a^2>3a,$$

因此原不等式得证.

(3) 对于三次函数 $f(x)$，其对称中心的横坐标即其导函数 $f'(x)$ 的极值点. 而由三次函数的对称性，函数 $f(x)$ 的极值之和为其对称中心纵坐标的 2 倍，即 $2f\left(-\frac{a}{3}\right)=0$. 而函数 $f'(x)$ 的极值为二次函数

$$y=3x^2+2ax+b$$

的顶点纵坐标 $b-\frac{a^2}{3}$. 根据题意，有

$$b-\frac{a^2}{3}\geqslant-\frac{7}{2},$$

将 $b=\frac{2}{9}a^2+\frac{3}{a}$ 代入，可得

$$\frac{3}{a}-\frac{a^2}{9}\geqslant-\frac{7}{2},$$

即

$$-\frac{(a-6)(2a^2+12a+9)}{18a}\geqslant0,$$

因此 a 的取值范围是 $(3,6]$.

例题 41

(题 23) 已知一个口袋中有 m 个白球，n 个黑球（$m,n\in\mathbb{N}^*$，$n\geqslant2$），这些球除颜色外完全相同. 现将口袋中的球随机地逐个取出，并放入如图所示的编号为 $1,2,3,\cdots,m+n$ 的抽屉内，其中第 k 次取出的球放入编号为 k 的抽屉（$k=1,2,3,\cdots,m+n$）.

1	2	3	$\cdots$	$m+n$

(1) 试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 p；

(2) 随机变量 X 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数，$E(X)$ 是 X 的数学期望，证明：$E(X)<\frac{n}{(m+n)(n-1)}$.

解析　*(1)* 显然 $p=\frac{n}{m+n}$；

(2) 根据题意，有

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=n}^{m+n}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{m+n}\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{k}\\
&< \frac{1}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{m+n}\frac{\mathrm{C}_{k-1}^{n-1}}{k-1}\\
&= \frac{1}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\cdot\sum_{k=n}^{m+n}\frac{\mathrm{C}_{k-2}^{n-2}}{n-1}\\
&= \frac{1}{(n-1)\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\cdot\left(\mathrm{C}_{n-2}^{n-2}+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_{m+n-2}^{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)\mathrm{C}_{m+n}^{n}}\cdot\mathrm{C}_{m+n-1}^{n-1}\\
&= \frac{n}{(m+n)(n-1)},
\end{aligned}$$

所以原命题成立.

11　2017 年山东卷理

例题 42

(理 10) 已知当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $y=(mx-1)^2$ 的图象与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1]\cup\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$　　B. $(0,1]\cup[3,+\infty)$

C. $\left(0,\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$　　D. $\left(0,\sqrt{2}\right]\cup[3,+\infty)$

解析　B.

设 $f(x)=(mx-1)^2-\sqrt{x}-m$ ，$x\in[0,1]$ ，则

$$f(0)=1-m,$$
$$f(1)=(m-1)^2-1-m=m(m-3),$$

得到讨论分界点 $m=1,3$.

情形一　$m\in(0,1)$. 此时函数 $f(x)$ 单调递减，且 $f(0)\cdot f(1)<0$ ，因此有唯一零点，符合题意.

情形二　$m=1$. 此时函数 $f(x)$ 单调递减，且 $f(0)=0$ ，因此有唯一零点，符合题意.

情形三　$m\in(1,3)$. 此时函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2m(mx-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

是单调递增函数，因此 $f(x)$ 或者单调，或者先单调递减再单调递增，因此在区间端点处取得最大值. 而此时 $f(0)<0$ 且 $f(1)<0$ ，不符合题意.

情形四　$m\in[3,+\infty)$. 与情形三类似，此时 $f(0)<0$ ，$f(1)\geqslant 0$ ，结合 $f(x)$ 的单调性，符合题意.

综上所述，正实数 m 的取值范围是 $(0,1]\cup[3,+\infty)$.

例题 43

(理 15) 若函数 $e^x f(x)$ ($e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质．下列函数中所有具有 M 性质的函数的序号为________．

(1) $f(x)=2^{-x}$; (2) $f(x)=3^{-x}$; (3) $f(x)=x^3$; (4) $f(x)=x^2+2$.

解析　*(1)(4)*.

(1) 对于函数 $f(x)=2^{-x}$ ，有 $e^x f(x)=\left(\dfrac{e}{2}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

(2) 对于函数 $f(x)=3^{-x}$ ，有 $e^x f(x)=\left(\dfrac{e}{3}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减;

(3) 对于函数 $f(x)=x^3$ ，有

$$(e^x f(x))'=e^x\left(x^3+3x^2\right)=e^x\cdot x^2(x+3),$$

因此在 $(-\infty,-3)$ 上，函数 $e^x f(x)$ 单调递减;

(4) 对于函数 $f(x)=x^2+2$ ，有

$$(e^x f(x))'=e^x\left(x^2+2+2x\right)=e^x\left[(x+1)^2+1\right]>0,$$

因此函数 $e^x f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

综上所述，具有 M 性质的函数的序号是 *(1)(4)*.

例题 44

(理 20) 已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$ ， $g(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)$ ，其中 $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数．

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f(\pi))$ 处的切线方程;

(2) 令 $h(x)=g(x)-af(x)$ ($a\in\mathbb{R}$)，讨论 $h(x)$ 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值．

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2x-2\sin x,$$

于是 $f(\pi)=\pi^2-2$ ， $f'(\pi)=2\pi$ ，所求的切线方程为

$$y=2\pi(x-\pi)+\pi^2-2,$$

也即 $y=2\pi x-\pi^2-2$.

(2) 根据题意，有

$$h(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-ax^2-2a\cos x,$$

其导函数

$$h'(x)=2\left(e^x-a\right)(x-\sin x).$$

由于

$$(x-\sin x)'=1-\cos x,$$

于是该函数单调递增，有唯一零点 $x=0$. 这样就得到了讨论分界点 $a=0,1$.

情形一　$a\leqslant 0$. 此时函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=0$ 处取得极小值 $-1-2a$.

情形二　$0<a<1$. 此时函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，在 $(\ln a,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=\ln a$ 处取得极大值

$$2a\ln a-2a-a\ln^2 a-a\sin\ln a-a\cos\ln a,$$

在 $x=0$ 处取得极小值 $-1-2a$.

情形三　$a=1$. 此时函数 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，没有极值.

情形四　$a>1$. 此时函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=0$ 处取得极大值 $-1-2a$ ，在 $x=\ln a$ 处取得极小值

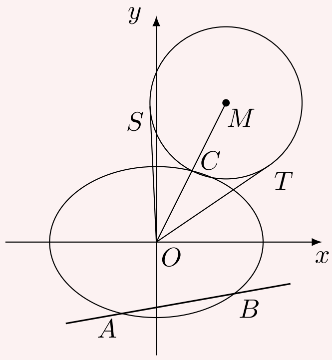
$$2a\ln a-2a-a\ln^2 a-a\sin\ln a-a\cos\ln a.$$

例题 45

(理 21) 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2 .

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 如图，动直线 $l:y=k_1x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 交椭圆 E 于 A,B 两点，C 是椭圆 E 上一点，直线 OC 的斜率为 k_2 ，且 $k_1k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. M 是线段 OC 延长线上一点，且 $|MC|:|AB|=2:3$ ，圆 M 的半径为 $|MC|$ ，OS,OT 是圆 M 的两条切线，切点分别为 S,T . 求 $\angle SOT$ 的最大值，并求取得最大值时直线 l 的斜率.



解析　(1) 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2) 设 $\angle SOM=\theta$ ，则 $\angle SOT=2\theta$ ，且

$$\sin\theta=\frac{|MC|}{|OM|}=\frac{\frac{2}{3}|AB|}{|OC|+\frac{2}{3}|AB|}=\frac{2}{2+3\cdot\dfrac{|OC|}{|AB|}}.$$

联立直线 l 与椭圆 E 的方程，可得

$$\left(\frac{1}{2}+k_1^2\right)x^2-\sqrt{3}k_1x-\frac{1}{4}=0,$$

因此
$$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\frac{\sqrt{4k_1^2+\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}+k_1^2}.$$
联立直线 $y=k_2x$ 与椭圆 E 的方程，可得
$$\left(\frac{1}{2}+k_2^2\right)x^2=1,$$
因此
$$|OC|=\sqrt{1+k_2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+k_2^2}}=\frac{\sqrt{k_1^2+k_1^2k_2^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}k_1^2+k_1^2k_2^2}}=\frac{\sqrt{k_1^2+\dfrac{1}{8}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}k_1^2+\dfrac{1}{8}}}.$$
这样就有
$$\begin{aligned}\frac{|OC|}{|AB|}&=\frac{\sqrt{k_1^2+\dfrac{1}{8}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}k_1^2+\dfrac{1}{8}}}\cdot\frac{\dfrac{1}{2}+k_1^2}{\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{4k_1^2+\dfrac{1}{2}}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{k_1^2+\dfrac{1}{2}}{\sqrt{k_1^2+\dfrac{1}{4}}\cdot\sqrt{k_1^2+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4k_1^2+\dfrac{1}{k_1^2}+5}}\\&\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2\sqrt{4k_1^2\cdot\dfrac{1}{k_1^2}}+5}}\\&=\frac{2}{3},\end{aligned}$$
等号当且仅当 $k_1^2=\dfrac{1}{2}$ 时取得．因此 $\sin\theta$ 的最大值为
$$\frac{2}{2+3\cdot\dfrac{2}{3}}=\frac{1}{2},$$
继而 $\angle SOT$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$，此时直线 l 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

12　2017 年山东卷文

例题 46

(文 10) 若函数 $\mathrm{e}^xf(x)$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质．下列函数中具有 M 性质的是 (　　)

A. $f(x)=2^{-x}$　　B. $f(x)=x^2$　　C. $f(x)=3^{-x}$　　D. $f(x)=\cos x$

解析　A.

对于选项 A，有 $\mathrm{e}^x f(x)=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，因此函数 $f(x)$ 具有 M 性质；

对于选项 B，有

$$\left(\mathrm{e}^x f(x)\right)'=\mathrm{e}^x\left(x^2+2x\right)=\mathrm{e}^x\cdot x(x+2),$$

而在 $(-\infty,-2)$ 上，函数 $\mathrm{e}^x f(x)$ 单调递减，因此函数 $f(x)$ 不具有 M 性质；

对于选项 C，有 $\mathrm{e}^x f(x)=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，因此函数 $f(x)$ 不具有 M 性质；

对于选项 D，有

$$\left(\mathrm{e}^x f(x)\right)'=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=\mathrm{e}^x\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right),$$

而在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 上，函数 $\mathrm{e}^x f(x)$ 单调递减，因此函数 $f(x)$ 不具有 M 性质.

例题 47

(文 15) 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 交于 A,B 两点．若 $|AF|+|BF|=4|OF|$，则该双曲线的渐近线方程为________.

解析　$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

设 $A\left(2pm,2pm^2\right)$，$B\left(2pn,2pn^2\right)$，则由抛物线的定义，可得

$$\left(2pm^2+\frac{p}{2}\right)+\left(2pn^2+\frac{p}{2}\right)=4\cdot\frac{p}{2},$$

即

$$m^2+n^2=\frac{1}{2}.$$

双曲线的弦 AB 的中点为 $\left(pm+pn,pm^2+pn^2\right)$，由双曲线的垂径定理，可得

$$\frac{2pm^2-2pn^2}{2pm-2pn}\cdot\frac{pm^2+pn^2}{pm+pn}=\frac{b^2}{a^2},$$

即

$$m^2+n^2=\frac{b^2}{a^2},$$

因此 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

其他方法　联立双曲线与抛物线的方程消去 x 得

$$\frac{1}{b^2}y^2-\frac{2p}{a^2}y+1=0,$$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有

$$y_1+y_2=\frac{2pb^2}{a^2}.$$

由抛物线的定义知

$$|AF|+|BF|=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}=\frac{2pb^2}{a^2}+p=4\cdot\frac{p}{2},$$

所以 $a^2=2b^2$ ，从而双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

例题 48

(文 20) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ ， $a\in\mathbb{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$ ，讨论 $g(x)$ 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

解析　*(1)* 当 $a=2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ ，其导函数

$$f'(x)=x^2-2x,$$

因此 $f(3)=0$ ， $f'(3)=3$ ，得到对应的切线方程为 $y=3x-9$.

(2) 函数 $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2+(x-a)\cos x-\sin x$ ，其导函数

$$g'(x)=(x-a)(x-\sin x).$$

考虑到函数 $y=x-\sin x$ 是 $\mathbb{R}$ 上单调递增函数，且有唯一零点 $x=0$ ，因此得到讨论分界点 $a=0$.

情形一　$a<0$. 此时函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $(a,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=a$ 处取得极大值 $g(a)=-\dfrac{1}{6}a^3-\sin a$ ，在 $x=0$ 处取得极小值 $g(0)=-a$.

情形二　$a=0$. 此时函数 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，没有极值.

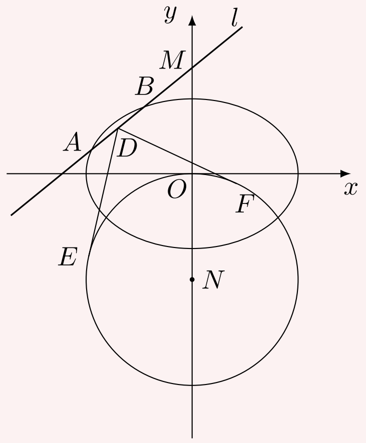
情形三　$a>0$. 此时函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=0$ 处取得极大值 $g(0)=-a$ ，在 $x=a$ 处取得极小值 $g(a)=-\dfrac{1}{6}a^3-\sin a$.

例题 49

(文 21) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆 C 截直线 $y=1$ 所得线段的长度为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 动直线 $l:y=kx+m(m\neq 0)$ 交椭圆 C 于 A,B 两点，交 y 轴于点 M . 点 N 是 M 关于 O 的对称点. $\odot N$ 的半径为 $|NO|$. 设 D 为 AB 的中点， DE,DF 与 $\odot N$ 分别相切于点 E,F ，求 $\angle EDF$ 的最小值.



解析　(1) 椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=b^2$，被 $y=1$ 截得的弦长

$$2\sqrt{2(b^2-1)}=2\sqrt{2},$$

解得 $b=\sqrt{2}$，因此椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

(2) 设 $D(x_0,y_0)$，则根据椭圆的垂径定理，可得直线 AB 的斜率 k 满足

$$k\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{2},$$

于是 $k=-\dfrac{x_0}{2y_0}$，直线 AB 的方程为

$$y=-\frac{x_0}{2y_0}(x-x_0)+y_0,$$

因此 $M\left(0,\dfrac{x_0^2}{2y_0}+y_0\right)$，$N\left(0,-\dfrac{x_0^2}{2y_0}-y_0\right)$．进而

$$\begin{aligned}\sin\angle DEN&=\frac{|ON|}{|DN|}\\&=\frac{\dfrac{x_0^2}{2y_0}+y_0}{\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{x_0^2}{2y_0}+2y_0\right)^2}}\\&=\frac{t+1}{\sqrt{2t+(t+2)^2}}\\&=\sqrt{\frac{(t+1)^2}{(t+1)^2+4(t+1)-1}}\\&=\sqrt{\frac{1}{-\left(\dfrac{1}{t+1}\right)^2+4\cdot\dfrac{1}{t+1}+1}}\\&\geqslant\frac{1}{2},\end{aligned}$$

其中 $t=\dfrac{x_0^2}{2y_0^2}$，$t\geqslant 0$．等号当且仅当 $t=0$ 时取得，因此 $\angle EDF$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$．

13　2017 年天津卷理

例题 50

(理 8) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, & x\leqslant 1,\\ x+\dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 设 $a\in\mathbb{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\dfrac{47}{16},2\right]$　　B. $\left[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}\right]$　　C. $\left[-2\sqrt{3},2\right]$　　D. $\left[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}\right]$

解析　A．

根据题意，有

$$\forall x\in\mathbb{R},-f(x)-\frac{x}{2}\leqslant a\leqslant f(x)-\frac{x}{2},$$

因此只需要计算函数 $g(x)=-f(x)-\dfrac{x}{2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值和函数 $h(x)=f(x)-\dfrac{x}{2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值即可．

函数 $g(x)$ 即

$$g(x)=\begin{cases}-x^2+\dfrac{x}{2}-3, & x\leqslant 1,\\ -\dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$$

其最大值为

$$\max\{g(x)\}=\max\left\{-\frac{47}{16},-2\sqrt{3}\right\}=-\frac{47}{16}.$$

函数 $h(x)$ 即

$$h(x)=\begin{cases}x^2-\dfrac{3}{2}x+3, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$$

其最小值为

$$\min\{h(x)\}=\min\left\{\frac{39}{16},2\right\}=2.$$

因此所求的取值范围是 $\left[-\dfrac{47}{16},2\right]$．

例题 51

(理 14) 用数字 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有________个．(用数字作答)

解析　1080．

情形一　四位数中没有偶数数字，个数为

$$\mathrm{A}_5^4=120.$$

情形二　四位数中有一个偶数数字，个数为

$$\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_4^4=960.$$

因此符合题意的四位数共有 $120+960=1080$ 个．

例题 52

(理 19) 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左焦点为 F，右顶点为 A，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．已知 A 是抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点，F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\dfrac{1}{2}$．

(1) 求椭圆的方程和抛物线的方程；

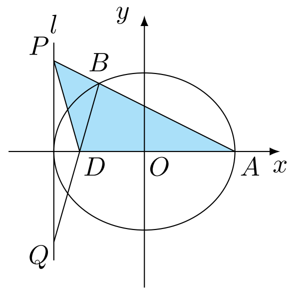
(2) 设 l 上两点 P,Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 $B\,(B$ 异于点 $A)$，直线 BQ 与 x 轴相交于点 D，若 $\triangle APD$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AP 的方程．

解析　(1) 根据题意，抛物线的准线 l 过椭圆的左顶点，因此有

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a-c=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

其中 c 为椭圆的半焦距．解方程，可得椭圆的方程为 $x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$，抛物线的方程为 $y^2=4x$．

(2) 如图．



考虑到图形的对称性，先计算 B 点纵坐标为正实数的情形．设 $B\left(\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，$P(-1,m)$，则

$$\frac{m-0}{-1-1}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-0}{\cos\theta-1},$$

解得

$$m=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

于是 $Q\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta-1}\right)$，进而可得 D 点的横坐标为

$$\frac{\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta-1}-(-1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}=\frac{3\cos\theta-1}{3-\cos\theta}.$$

这样得到 $\triangle APD$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3\cos\theta-1}{3-\cos\theta}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{3-\cos\theta}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．进而可得直线 AP 的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

结合图形的对称性，可得直线 AP 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

例题 53

(理 20) 设 $a\in\mathbb{Z}$，已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0，$g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数．

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间；

(2) 设 $m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，求证：$h(m)h(x_0)<0$；

(3) 求证：存在大于 0 的常数 A，使得对于任意的正整数 p,q，且 $\dfrac{p}{q}\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，满足 $\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\geqslant\dfrac{1}{Aq^4}$．

解析　(1) 函数 $g(x)$ 为

$$g(x)=8x^3+9x^2-6x-6,$$

其导函数为

$$g'(x)=24x^2+18x-6=6(4x-1)(x+1),$$

因此函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$；单调递减区间为 $\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$.

(2) 令 $\varphi(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，则其导函数

$$\varphi'(x)=g'(x)(x-x_0),$$

而在 $[1,2]$ 上，$g'(x)>0$，因此 $\varphi(x)$ 在 $[1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,2]$ 上单调递增，进而在 $[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 上，$\varphi(x)>0$，故

$$h(m)=\varphi(m)>0.$$

令 $\mu(x)=g(x_0)(x-x_0)-f(x)$，则其导函数

$$\mu'(x)=g(x_0)-g(x),$$

而在 $[1,2]$ 上，$g(x)$ 单调递增，因此 $\mu(x)$ 在 $[1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,2]$ 上单调递减，进而在 $[1,x_0)\cup(x_0,2]$ 上，$\mu(x)<0$，故

$$h(x_0)=\mu(m)<0.$$

综上所述，有 $h(m)\cdot h(x_0)<0$，命题得证.

(3) 由于函数 $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调，根据第 (2) 小题 $h(x)$ 在 m 和 x_0 之间存在唯一零点．令 $m=\dfrac{p}{q}$，$h(x)$ 在 m 和 x_0 之间的零点为 x_1，则有

$$h(x_1)=g(x_1)\left(\frac{p}{q}-x_0\right)-f\left(\frac{p}{q}\right)=0,$$

进而

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|=\frac{\left|f\left(\dfrac{p}{q}\right)\right|}{g(x_1)}=\frac{\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|}{g(x_1)\cdot q^4},$$

由于 $\dfrac{p}{q}\neq x_0$，而函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内的零点唯一，因此

$$\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|\neq 0,$$

进而有

$$\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|\geqslant 1,$$

又因为 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以

$$g(x_1)\in[g(1),g(2)]=[5,82],$$

因此取 $A=82$ 即可，因此命题得证.

14　2017 年天津卷文

例题 54

(文 8) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|+2, x<1,\\ x+\dfrac{2}{x}, x\geqslant 1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbb{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-2,2]$　　B. $[-2\sqrt{3},2]$　　C. $[-2,2\sqrt{3}]$　　D. $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

解析　A.

根据题意，有
$$-f(x)-\frac{x}{2}\leqslant a\leqslant f(x)-\frac{x}{2},$$
而
$$f(x)-\frac{x}{2}=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+2, & x<0,\\ \dfrac{x}{2}+2, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$$
其最小值为 2；另一方面，有
$$-f(x)-\frac{x}{2}=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-2, & x<0,\\ -\dfrac{3}{2}x-2, & 0\leqslant x<1,\\ -\dfrac{3x}{2}-\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$$
其最大值为 -2. 综上所述，a 的取值范围是 $[-2,2]$.

注　画出两个函数的图象，通过数形结合也可以快速求解此题.

例题 55

(文 14) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$AB=3$，$AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbb{R})$，且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则 λ 的值为 ________ .

解析　$\dfrac{3}{11}$.

根据共线向量的表达，有
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}&=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=-\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{2}{3}\cdot 4\lambda+\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}\right)\cdot 3\cdot 2\cdot\cos 60^\circ\\&=\frac{11}{3}\lambda-5=-4,\end{aligned}$$
解得 $\lambda=\dfrac{3}{11}$.

例题 56

(文 19) 设 $a,b\in\mathbb{R}$ ，$|a|\leqslant 1$. 已知函数 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$ ，$g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象在公共点 (x_0,y_0) 处有相同的切线.

(i) 求证: $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0 ;

(ii) 若关于 x 的不等式 $g(x)\leqslant \mathrm{e}^x$ 在区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立，求 b 的取值范围.

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=3(x-a)(x-(4-a)).$$
而当 $|a|<1$ 时，有 $a<4-a$ ，于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,a)$ 和 $(4-a,+\infty)$; 单调递减区间是 $(a,4-a)$.

(2)(i) 函数 $g(x)$ 的导函数
$$g'(x)=\mathrm{e}^x\left(f(x)+f'(x)\right),$$
因此
$$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_0}f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0},\\ \mathrm{e}^{x_0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\right)=\mathrm{e}^{x_0},\end{cases}$$
解得 $\begin{cases}f(x_0)=1,\\ f'(x_0)=0,\end{cases}$ 因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0 .

(ii) 根据 *(i)* 的结果，$x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点. 题意为
$$\forall x\in[x_0-1,x_0+1], f(x)\leqslant 1,$$
因此 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，从而 $x_0=a$. 考虑到
$$a-1<a<a+1<4-a,$$
于是 $f(x)$ 在区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 上的最大值为 $f(a)$ ，题中条件等价于
$$a^3-6a^2-3a^2(a-4)+b=1,$$
也即
$$b=2a^3-6a^2+1,$$
其中 $-1\leqslant a\leqslant 1$. 设函数 $\varphi(x)=2x^3-6x^2+1$ ，则其导函数
$$\varphi'(x)=6x(x-2),$$
于是 $\varphi(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $x=0$ 处取得极大值，也为最大值，进而 $\varphi(x)$

在 $[-1,1]$ 上的值域为

$$[\min\{\varphi(-1),\varphi(1)\},\varphi(0)]=[-7,1],$$

因此 b 的取值范围是 $[-7,1]$.

例题 57

(文 20) 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$ ，右顶点为 A ，点 E 的坐标为 $(0,c)$ ，$\triangle EFA$ 的面积为 $\dfrac{b^2}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率；

(2) 设点 Q 在线段 AE 上，$|FQ|=\dfrac{3}{2}c$ ，延长线段 FQ 与椭圆交于点 P ，点 M ，N 在 x 轴上，$PM\parallel QN$ ，且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c ，四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

(i) 求直线 FP 的斜率；

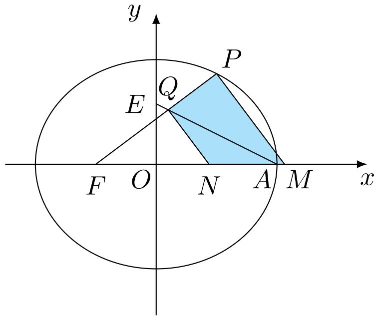
(ii) 求椭圆的方程.

解析　*(1)* 根据题意，有

$$\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot c=\frac{1}{2}b^2,$$

从而 $a=2c$ ，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

(2) 如图.



(i) 根据题意，有 $A(2c,0)$ ，$E(0,c)$ ，$FQ=\dfrac{3}{2}c$ ，设 $\angle QFA=\theta$ ，则由 E,Q,A 共线，可得

$$\frac{\frac{3}{2}c\sin\theta}{\frac{3}{2}c\cos\theta-3c}=\frac{c}{-2c},$$

解得 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ ，直线 FP 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$.

(ii) 由 *(i)* 可得 $Q\left(\dfrac{1}{5}c,\dfrac{9}{10}c\right)$. 根据焦半径公式 *II*，有

$$PF=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{3c^2}{2c-\frac{4}{5}c}=\frac{5}{2}c,$$

因此 $P\left(c,\dfrac{3}{2}c\right)$. 注意到 $PQ=c$, 于是 PM,QN 均与 PF 垂直，进而四边形 $PQNM$ 的面积

$$\begin{aligned}S_{PQNM}&=S_{\triangle MPF}-S_{\triangle NQF}\\&=\frac{1}{2}FP^2\tan\theta-\frac{1}{2}FQ^2\tan\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left[\left(\frac{5}{2}c\right)^2-\left(\frac{3}{2}c\right)^2\right]\\&=\frac{3c^2}{2},\end{aligned}$$

从而 $c=2$, 椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

15　2017 年上海卷

例题 58

(题 11) 设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, 且 $\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$, 则 $|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$ 的最小值等于________.

解析　$\dfrac{\pi}{4}$.

由于

$$\frac{1}{2+\sin x}\leqslant\frac{1}{2-1}=1,$$

等号当且仅当 $\sin x=-1$ 时取得，因此根据题意，有

$$\sin\alpha_1=\sin(2\alpha_2)=-1,$$

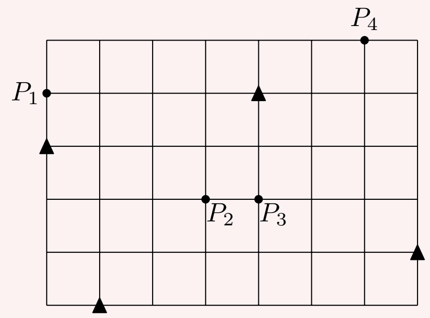
因此 $\alpha_1=-\dfrac{\pi}{2}+2k_1\pi$, $\alpha_2=-\dfrac{\pi}{4}+k_2\pi$, 其中 $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$. 进而

$$|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|=\left|10+\frac{1}{2}-2k_1+\frac{1}{4}+k_2\right|\cdot\pi\geqslant\frac{\pi}{4},$$

当 $k_1=5$, $k_2=-1$ 时等号成立. 因此所求的最小值为 $\dfrac{\pi}{4}$.

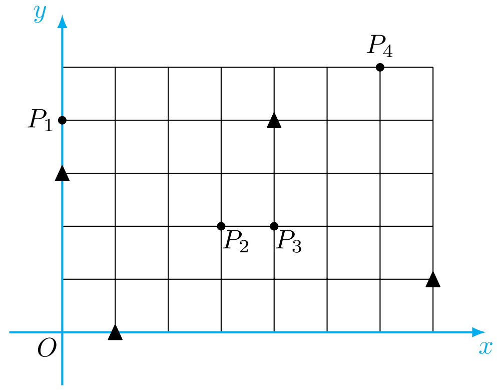
例题 59

(题 12) 如图，用 35 个单位正方形拼成一个矩形，点 P_1,P_2,P_3,P_4 以及四个标记为 ▲ 的点在正方形的顶点处. 设集合 $\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$, 点 $P\in\Omega$. 过 P 作直线 l_P , 使得不在 l_P 上的 ▲ 的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 l_P 一侧和另一侧的 ▲ 的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且仅有一条满足 $D_1(l_P)=D_2(l_P)$, 则 Ω 中所有这样的 P 为________.



解析　P_1,P_3,P_4 .

如图建系，设 4 个 ▲ 的坐标分别为 $(0,3),(1,0),(4,4),(7,1)$ ，且 $P_1(0,4)$ ， $P_2(3,2)$ ， $P_3(4,2)$ ， $P_4(6,5)$.



设直线 $l:Ax+By+C=0$ ，则条件 $D_1(l)=D_2(l)$ 即

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{A\cdot x_i+B\cdot y_i+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

其中 (x_i,y_i) ($i=1,2,3,4$) 表示 4 个 ▲ 的坐标．也即

$$\sum_{i=1}^{4}x_iA+\sum_{i=1}^{4}y_iB+4C=0,$$

化简得

$$3A+2B+C=0.$$

因此题中条件等价于 l_P 过点 $(3,2)$ ，该点即 P_2 ．因此 P_1,P_3,P_4 符合题意．

例题 60

(题 16) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ ． P 为 C_1 上的动点， Q 为 C_2 上的动点， w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值．记 $\Omega=\left\{(P,Q)\mid P\in C_1,Q\in C_2,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=w\right\}$ ，则 Ω 中（　　）

A. 元素个数为 2　　B. 元素个数为 4　　C. 元素个数为 8　　D. 含有无穷个元素

解析　D.

设 $P(6\cos\alpha,2\sin\alpha)$ ， $Q(\cos\beta,3\sin\beta)$ ，则

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(6\cos\alpha,2\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,3\sin\beta)=6\cos(\alpha-\beta),$$

于是当 $\alpha-\beta=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 时 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 取得最大值 $w=6$，进而 Ω 中有无穷多个元素.

例题 61

(题 20) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A$ 为 Γ 的上顶点，P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点．M 为 x 轴正半轴上的动点．

(1) 若 P 在第一象限，且 $|OP|=\sqrt{2}$，求 P 的坐标；

(2) 设 $P\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$．若以 A,P,M 为顶点的三角形是直角三角形，求 M 的横坐标；

(3) 若 $|MA|=|MP|$，直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C，且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$，求直线 AQ 的方程.

解析　(1) 设 $P(x_0,y_0)$，则有
$$x_0^2+y_0^2=2,\ \frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1,$$
解得 $P\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

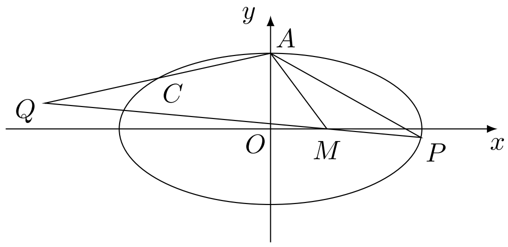
(2) 设 $M(m,0)\ (m>0)$，直角顶点可能为 P 或 M.

情形一　直角顶点为 P．此时有 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，即
$$\left(0-\frac{8}{5},1-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(m-\frac{8}{5},0-\frac{3}{5}\right)=0,$$
也即
$$20m-29=0,$$
解得 $M\left(\dfrac{29}{20},0\right)$.

情形二　直角顶点为 M．此时有 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，即
$$(0-m,1-0)\cdot\left(\frac{8}{5}-m,\frac{3}{5}-0\right)=0,$$
也即
$$5m^2-8m+3=0,$$
解得 $M\left(\dfrac{3}{5},0\right)$ 或 $M(1,0)$.

综上所述，M 的横坐标为 $\dfrac{3}{5},1,\dfrac{29}{20}$.

(3) 先根据 $|MA|=|MP|$ 作出点 M，然后 $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$ 作出点 Q，最后根据 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$ 作出点 C，如图.



设 $M(m,0)$，$P(2\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $m>0$，$\theta\in[0,2\pi)$ 且 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$，则由 $|MA|=|MP|$，可得
$$(2\cos\theta,\sin\theta-1)\cdot\left(\frac{2\cos\theta+0}{2}-m,\frac{\sin\theta+1}{2}-0\right)=0,$$

化简得
$$m=\frac{3}{4}\cos\theta.$$
又 $Q(-6\cos\theta+4m,-3\sin\theta)$，$C\left(-3\cos\theta+2m,-\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\right)$．根据题意，有
$$\frac{(-3\cos\theta+2m)^2}{4}+\left(-\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2=1,$$
即
$$\frac{9}{4}-3m\cos\theta+m^2-\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{3}{4}=0,$$
将 $m=\frac{3}{4}\cos\theta$ 代入，化简得
$$9\sin^2\theta-8\sin\theta-1=0,$$
于是 $\sin\theta=-\frac{1}{9}$．进而 $\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，$m=\frac{\sqrt{5}}{3}$．直线 AQ 的斜率为
$$\frac{-3\sin\theta-1}{-6\cos\theta+4m-0}=\frac{\sqrt{5}}{10},$$
因此所求直线 AQ 的方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{10}x+1$．

例题 62

(题 21) 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$．

(1) 若 $f(x)=ax^3+1$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数，证明：$f(x)$ 是常值函数；

(3) 设 $f(x)$ 恒大于零，$g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的、恒大于零的周期函数，M 是 $g(x)$ 的最大值．函数 $h(x)=f(x)g(x)$．证明：$h(x)$ 是周期函数的充要条件是 $f(x)$ 是常值函数．

解析　*(1)* 根据题意，对函数 $f(x)=ax^3+1$ 而言，不等式 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 等价于
$$ax_1^3+1\leqslant ax_2^3+1,$$
即
$$a(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]\leqslant 0,$$
也即 $a\geqslant 0$．因此 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$．

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，则 $\forall x\in\mathbb{R},f(x+T)=f(x)$．由于 $f(0)=f(T)$，于是对任意 $x\in(0,T)$，都有
$$f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(T)=f(0),$$
于是函数 $f(x)$ 在一个周期 $[0,T)$ 内为常值．因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是常值函数．

(3) 充分性显然，下面用反证法证明必要性．若 $f(x)$ 不是常值函数，那么根据第 *(2)* 小题的结果，$f(x)$ 必然

不是周期函数．设 $g(x)$ 的周期为 $T\ (T>0)$，则必然存在实数 x_0 使得

$$f(x_0+T)>f(x_0),$$

否则 $f(x)$ 是周期为 $|T|$ 的函数，矛盾．于是当 $x<x_0$ 时，有

$$h(x)=f(x)g(x)\leqslant f(x_0)\cdot M.$$

且存在 $x_1>x_0+T$，有 $g(x_1)=M$，从而

$$h(x_1)=f(x_1)g(x_1)\geqslant f(x_0+T)\cdot M.$$

由于函数 $h(x)$ 为周期函数，设其周期为 T'，因此必然存在正整数 k，使得

$$x_1-k\cdot|T'|<x_0,$$

从而有

$$h(x_1-k\cdot|T'|)=h(x_1)\leqslant f(x_0)\cdot M<f(x_0+T)\cdot M\leqslant h(x_1),$$

矛盾．

综上，原命题得证．