高考压轴题的分析与解
2015 年

兰琦

2018 年 2 月 25 日

目录

第一章　全国 I 卷

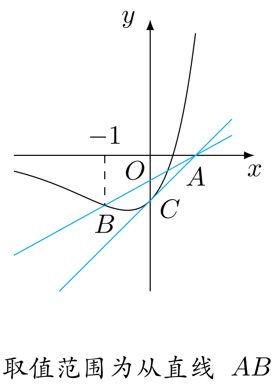
1.1　独一无二

理科第 12 题.　设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$　　B. $\left[-\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},\dfrac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$

分析　考虑将含参不等式
$$\mathrm{e}^x(2x-1)-ax+a<0$$
分离[1]为
$$\mathrm{e}^x(2x-1)<a(x-1),$$
这样题意即曲线 $g(x)=\mathrm{e}^x(2x-1)$ 在过定点 $(1,0)$ 且斜率为 a 的直线 $y=a(x-1)$ 下方的部分在 x 轴上的投影只包含唯一整数.

由于 $g(x)$ 的导函数
$$g'(x)=\mathrm{e}^x(2x+1),$$
于是 $g(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 处取得极小值 $-\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，如图. 结合图象可知，符合题意的唯一整数为 0.



设 $B(-1,g(-1))$，$C(0,g(0))$，则 a 的取值范围为从直线 AB 的斜率到直线 AC 斜率的左闭右开区间，也即 $\left[\dfrac{3}{2\mathrm{e}},1\right)$.

解　D

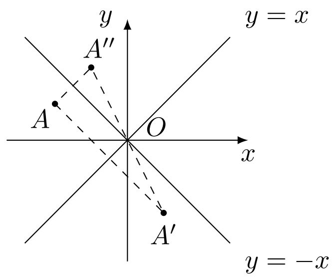
[1] 详见附录『分离变量法』

1.2 两次对称

文科第 12 题. 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$，则 $a=($ $)$

A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

分析 一个点关于直线 $y=-x$ 的对称点可以看作是先关于直线 $y=x$ 对称，再关于原点对称的结果，如图.



于是函数 $y=f(x)$ 的解析式等价于

$$-x=2^{-y+a}，即\ y=a-\log_2(-x).$$

根据题意，有

$$a-\log_2(-(-2))+a-\log_2(-(-4))=1,$$

解得 $a=2$.

解 C

1.3 滑动的封口

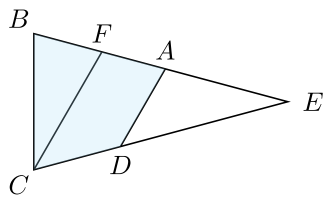
理科第 16 题. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，则 AB 的取值范围是________.

分析 先设法作出符合题意的图形.

1、作两底角为 75°，且底边长为 2 的等腰三角形 EBC；

2、在边 BE 上取点 F，使 $\angle BFC=75^\circ$，连接 FC；

3、在线段 FE 上 (不包含端点) 任取一点为 A，过 A 作 FC 的平行线，交 CE 于 D，如图.



这样就有 AB 的取值范围是线段 BF 的长度到线段 BE 的长度的开区间.

接下来计算 BF 与 BE 的长度. 在 $\triangle BCF$ 中，易得

$$BF = 4\sin 15^\circ = 4\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

而由于三角形 BCF 和三角形 BEC 相似，于是

$$BE = \frac{BC^2}{BF} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

解 $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

1.4 隐藏的焦点

文科第 **16** 题. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点，P 是 C 的左支上一点，$A(0, 6\sqrt{6})$. 当 $\triangle APF$ 周长最小时，该三角形的面积为________.

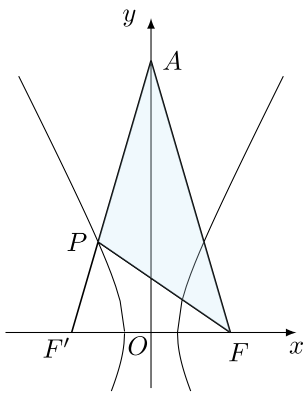
分析 三角形 APF 中 AF 的边长固定，因此只需要考虑 $PA + PF$ 的最小值. 记 F' 为双曲线的左焦点，注意到双曲线左支上的点 P 满足

$$PF - PF' = 2a,$$

其中 a 为双曲线的实半轴长，于是

$$PA + PF = PA + PF' + 2a \geqslant AF' + 2a,$$

因此当 P 位于线段 AF' 与双曲线左支的交点位置时，$\triangle APF$ 的周长最小，如图.



此时直线 AF' 的方程为

$$AF' : y = 2\sqrt{6}(x + 3),$$

与双曲线方程联立解得 $x = -7$ (舍) 或 $x = -2$. 于是 P 点坐标为 $P\left(-2, 2\sqrt{6}\right)$. 因此此时 $\triangle APF$ 的面积为

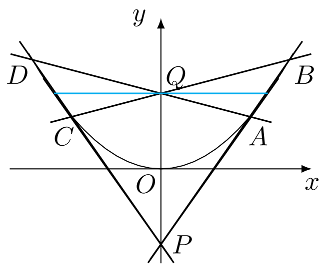
$$\frac{1}{2} \cdot FF' \cdot (y_A - y_P) = 12\sqrt{6}.$$

解 $12\sqrt{6}$

1.5 极限引路

理科第 20 题. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l:y=kx+a(a>0)$ 交于 M,N 两点.
(1) 当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程；
(2) y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？说明理由.

分析 第 (1) 小题为常规问题，难点在于第 (2) 小题.
反向思考问题. 若这样的定点 P 存在，那么过 P 作斜率互为相反数的两条直线，分别与抛物线交于 A,B 与 C,D，设 A,C 的纵坐标相同，B,D 的纵坐标相同，那么直线 AD 与 BC 过定点 $(0,a)$. 此时取极限情形，过点 P 引抛物线的两条切线，那么对应的切点弦所在的直线[1]与 y 轴的交点应为 $(0,a)$，如图.



设 P 点的坐标为 $(0,t)$，那么其对应的切点弦方程为

$$\frac{y+t}{2}=\frac{0\cdot x}{4},$$

即 $y=-t$，因此 $t=-a$. 接下来尝试证明即可.

解 (1) 当 $k=0$ 时，点 M、N 的横坐标为 $\pm 2\sqrt{a}$，进一步可得所求的切线方程为

$$y=\pm\sqrt{a}x-a.$$

(2) 存在，点 P 的坐标为 $(0,-a)$，证明如下.
设 $M\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{4}\right)$，$N\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{4}\right)$. 联立直线与抛物线方程有

$$x^2-4kx-4a=0,$$

于是

$$x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4a.$$

此时直线 PM 的斜率为

$$\frac{\frac{x_1^2}{4}-(-a)}{x_1-0}=\frac{x_1}{4}+\frac{a}{x_1},$$

同理，直线 PN 的斜率为 $\dfrac{x_2}{4}+\dfrac{a}{x_2}$，这两条直线的斜率之和为

$$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{a(x_1+x_2)}{x_1x_2}=0,$$

[1] 详见附录『圆锥曲线的切线方程』

因此直线 PM 与直线 PN 关于 y 轴对称，也就有 $\angle OPM=\angle OPN$ ，且与 k 的取值无关.

1.6　向量与圆幂

文科第 20 题.　已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M,N 两点.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$ ，其中 O 为坐标原点，求 $|MN|$.

分析 第 *(1)* 小题为常规的直线与圆的位置关系问题，可以通过比较圆心到直线的距离与半径的大小关系加以解决. 第 *(2)* 小题中的向量均以 O 为起点，应当转化起点[1]后再处理，其中的关键在于如何有效地表达 A,M,N 三点共线，因此选择以 A 为起点，利用圆幂定理即可解决.

解　(1) 圆 C 的圆心 $C(2,3)$ 到直线 $l:y=kx+1$ 的距离为

$$\frac{|2k-2|}{\sqrt{1+k^2}}<1,$$

解得

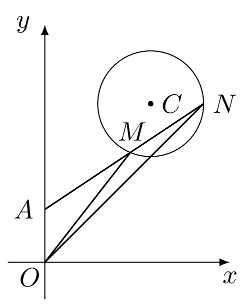
$$\frac{4-\sqrt{7}}{3}<k<\frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

(2) 根据题意

$$\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}\right)=12,$$

即

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}=12.$$



由圆幂定理，得

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=AC^2-r^2=7,$$

其中 r 表示圆 C 的半径.

取弦 MN 的中点 P ，则

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AP},$$

[1]详见附录『向量的换底公式』

于是可得

$$7-\overrightarrow{AO}\cdot 2\overrightarrow{AP}+1=12,$$

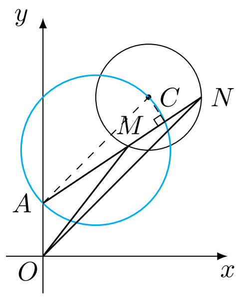
化简得

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=-2,$$

从而 $y_P=3$.

因此易知 P 即圆 C 的圆心，进而 MN 为圆 C 的直径，所求长度为 2 .

拓展 本题数据很特殊，因此可以直接判断出 P 点的位置．事实上，弦 MN 的中点形成的轨迹是以线段 AC 为直径的圆在圆 C 内的部分，如图．因此如果 P 点的纵坐标经过计算后不是 3 ，则在上述的轨迹上找到纵坐标符合题意的位置即可．



1.7 藏形匿影

理科第 21 题． 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}, g(x)=-\ln x$.

(1) 当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

(2) 用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\,(x>0)$ ，讨论 $h(x)$ 零点的个数．

分析 *第 (1) 小题是常规问题，重点是第 (2) 小题．*

注意到函数 $g(x)=-\ln x$ 在 $0<x<1$ 时函数值为正数，在 $x=1$ 时函数值为零，而在 $x>1$ 时函数值为负数．因此只需要分析函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的零点个数，以及在 $x=1$ 处的函数值正负即可．也就是说，$g(x)$ 的唯一任务，就是掩盖只需要研究含参三次函数 $f(x)$ 的性状的事实．此题的难点在于解题者容易陷入对 $\min$ 函数的思维定势中，盲目的比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 函数值的大小．

解 (1) 根据已知，$f'(x)=3x^2+a$ ．若 x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线，设切点横坐标为 t ，则有

$$\begin{cases} f(t)=0,\\ f'(t)=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} t^3+at+\dfrac{1}{4}=0,\\ 3t^2+a=0, \end{cases}$$

解得

$$t=\frac{1}{2},a=-\frac{3}{4}.$$

所以当 a 的值为 $-\frac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线.

(2) 先分析 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数．这些零点均为函数 $h(x)$ 的零点.

由于方程 $x^3+ax+\frac{1}{4}=0$ 即

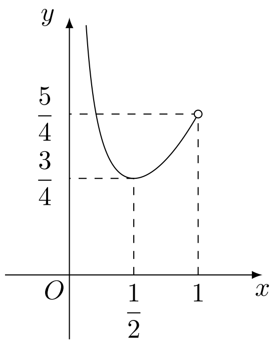
$$-a=x^2+\frac{1}{4x},$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数即直线 $y=-a$ 与函数 $\varphi(x)=x^2+\frac{1}{4x}\,(\,0<x<1\,)$ 图象的交点个数.

函数 $\varphi(x)$ 的导函数

$$\varphi'(x)=\frac{8x^3-1}{4x^2},$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极小值 $\frac{3}{4}$，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，如图.



因此函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数是

$$\begin{cases}0,-a<\dfrac{3}{4},\\1,-a\geqslant\dfrac{5}{4}\text{ 或 }-a=\dfrac{3}{4},\\2,\dfrac{3}{4}<-a<\dfrac{5}{4},\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}0,a>-\dfrac{3}{4},\\1,a\leqslant-\dfrac{5}{4}\text{ 或 }a=-\dfrac{3}{4},\\2,-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{3}{4},\end{cases}$$

接下来分析 $x=1$ 是否为函数 $h(x)$ 的零点.

由于 $f(1)=a+\frac{5}{4}$，于是当 $a\geqslant-\frac{5}{4}$ 时，$x=1$ 是函数 $h(x)$ 的零点；当 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$x=1$ 不是函数 $h(x)$ 的零点.

综上，函数 $h(x)$ 的零点个数为

$$\begin{cases}1,\quad a<-\dfrac{5}{4}\text{ 或 }a>-\dfrac{3}{4},\\2,\quad a=-\dfrac{5}{4}\text{ 或 }a=-\dfrac{3}{4},\\3,\quad -\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

1.8　移形换影

文科第 **21** 题．　设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数；

(2) 证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

分析 第 *(1)* 小题是常规的通过分析单调性确定函数零点个数的问题．第 *(2)* 小题是一个典型的极值点无法直接用参数表示，因此需要转换消元策略的问题．

解 (1) $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(2x\mathrm{e}^{2x}-a\right),x>0,$$
记函数 $g(x)=2x\mathrm{e}^{2x}-a$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，其值域为 $(-a,+\infty)$．
当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)>0$，因此 $f'(x)$ 的零点个数为 0；
当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的值域包含 0，且 $g(x)$ 单调递增，因此 $g(x)$ 有唯一零点，进而 $f'(x)$ 的零点个数为 1．
(2) 利用 (1) 中得到的结论可得，$f(x)$ 有极小值点，同时也是最小值点，为方程
$$2x\mathrm{e}^{2x}-a=0$$
的实根，记为 m．该实根无法直接用 a 表示，因此将 a 用 m 进行消元，即
$$a=2m\mathrm{e}^{2m}.$$
由于函数 $f(x)$ 的最小值为
$$f(m)=\mathrm{e}^{2m}-a\ln m,$$
因此只需要证明
$$\mathrm{e}^{2m}-a\ln m\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a},$$
即
$$\mathrm{e}^{2m}-2m\mathrm{e}^{2m}\cdot\ln m\geqslant 4m\mathrm{e}^{2m}+2m\mathrm{e}^{2m}\cdot\ln\frac{2}{2m\mathrm{e}^{2m}},$$
也即
$$\mathrm{e}^{2m}\cdot(2m-1)^2\geqslant 0,$$
这显然成立，因此原不等式得证．

第二章　全国 II 卷

2.1　火眼金睛识原型

理科第 12 题.　设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x\in\mathbf{R}$) 的导函数，$f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$, 则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　　　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　　　D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

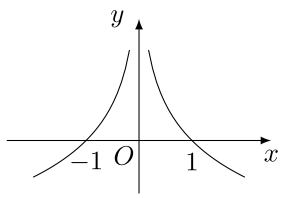
分析　注意到核心条件：当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$ ，即

$$x^2\cdot\left(x^{-1}\cdot f(x)\right)'<0,$$

于是可设辅助函数

$$g(x)=x^{-1}\cdot f(x), x\neq 0.$$

根据题意，该函数为偶函数，$g(-1)=0$ ，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，如图.



不等式 $f(x)>0$ ，即

$$x\cdot g(x)>0,$$

因此解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

解　A

拓展　常见的导函数模型有

$$\left(x^m\cdot f(x)\right)'=x^{m-1}\left(xf'(x)+mf(x)\right),$$
$$\left(\mathrm{e}^{nx}\cdot f(x)\right)'=\mathrm{e}^{nx}\left(nf(x)+f'(x)\right).$$

在应用中，经常隐藏因式 x^{m-1} 以及 e^{nx} ，需要我们准确地将其还原出来.

2.2 奇偶性来帮忙

文科第 12 题． 设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$ ，则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

A. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

分析 $f(x)$ 是偶函数，易知当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递增．于是不等式 $f(x)>f(2x-1)$ 即

$$|x|>|2x-1|,\text{ 也即 }x^2>(2x-1)^2,$$

解得 $\dfrac{1}{3}<x<1$.

解 A

2.3 直截了当

理科第 16 题． 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1,a_{n+1}=S_nS_{n+1}$ ，则 $S_n=$________.

分析 题中欲求结论为 S_n ，因此利用数列的项与前 n 项和的关系：

$$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$$

将条件全都转化为关于 S_n 的表达式，也即

已知 $S_1=-1$ ，$S_{n+1}-S_n=S_n\cdot S_{n+1}$ ，求 S_n .

显然 $S_n\neq 0$ ，在递推式两边同时除以 $S_n\cdot S_{n+1}$ ，可得

$$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1,$$

于是数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{S_1}=-1$ 为首项，-1 为公差的等差数列，其通项

$$\frac{1}{S_n}=-n,$$

因此 $S_n=-\dfrac{1}{n}$.

解 $-\dfrac{1}{n}$

2.4 公切线

文科第 16 题． 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$________.

分析 先求曲线 $y=x+\ln x$ 的切线方程，再解决直线与抛物线的位置关系的问题即可.
函数 $y=x+\ln x$ 的导函数

$$y'=1+\frac{1}{x},$$

于是曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)\bigg|_{x=1}(x-1)+1,$$

即

$$y=2x-1.$$

直线 $y=2x-1$ 与抛物线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，等价于联立后方程

$$ax^2+(a+2)x+1=2x-1$$

的判别式为 0，即 $a^2-8a=0$，解得 $a=0$ (舍去) 或 $a=8$.

解　8

2.5　暗伏的菱形

理科第 20 题.　已知椭圆 $C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M.
(1) 证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；
(2) 若 l 过点 $\left(\frac{m}{3},m\right)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

分析 有关弦的中点的问题[1]，以中点坐标为参数驱动图形，利用点差法进行消参往往可以简化运算.

解　(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}9x_1^2+y_1^2=m^2,\\9x_2^2+y_2^2=m^2,\end{cases}$$

两式相减得

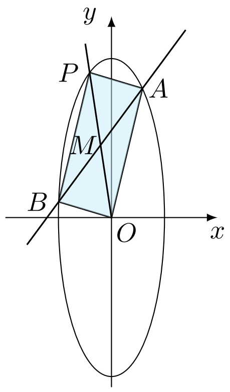
$$9(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0,$$

即

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-9.$$

事实上，等式左边即直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率之积. 因此原命题得证，且定值为 -9.
(2) 根据题意，如图.

[1]详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』



假设存在符合题意的平行四边形 $OAPB$ ，设 $M(x_0,y_0)$ ，则 $P(2x_0,2y_0)$ ，于是

$$9x_0^2+y_0^2=\frac{1}{4}m^2.$$

此时根据第 (1) 小题的结论，有

$$\frac{m-y_0}{\frac{m}{3}-x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-9,$$

整理得

$$3mx_0+my_0=9x_0^2+y_0^2=\frac{1}{4}m^2,$$

即

$$3x_0+y_0=\frac{1}{4}m.$$

由关于 x_0,y_0 的两个方程齐次化可得

$$\frac{9x_0^2+y_0^2}{(3x_0+y_0)^2}=4,$$

于是解得直线 l 的斜率为

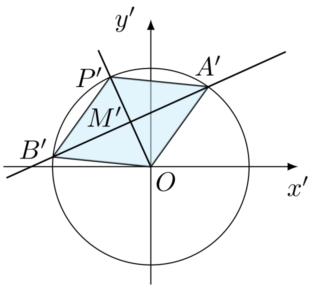
$$-9\cdot\frac{x_0}{y_0}=4\pm\sqrt{7}.$$

拓展　本题还可以从仿射变换[1]的角度求解.

在伸缩变换

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$$

下椭圆变成半径为 $m'=\dfrac{m}{3}$ 的圆 $x'^2+y'^2=m'^2$ ，所有直线的斜率变为原来的 $\dfrac{1}{3}$ ，如图.



[1]详见附录『仿射变换』

在第 (1) 小题中由于变换后的直线 $O'M'$ 与直线 $A'B'$ 垂直，因此斜率的乘积为 -1，而 $k_{OM'}=\dfrac{1}{3}k_{OM}$，$k_{A'B'}=\dfrac{1}{3}k_{AB}$，所以变换前直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值 -9.
在第 (2) 小题中，欲使得 $OAPB$ 为平行四边形，只需要变换后的四边形 $O'A'P'B'$ 为菱形．由于变换前的直线 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，故变换后的直线 l' 应该过点 $\left(\dfrac{m}{3},\dfrac{m}{3}\right)$，即 (m',m')．设变换后的直线 $l':y'=k'(x'-m')+m'$，则只需要 O' 到直线 l' 的距离为圆的半径的一半即可，也即

$$\frac{|-k'm'+m'|}{\sqrt{1+k'^2}}=\frac{m'}{2},$$

即

$$3k'^2-8k'+3=0,$$

解得

$$k'=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3},$$

于是变换前的直线 l 的斜率为

$$k=3k'=4\pm\sqrt{7}.$$

文科第 **20** 题． 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上．
(1) 求 C 的方程；
(2) 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M．证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值．

分析 *第 (1) 小题是考查椭圆基本量的常规问题，第 (2) 小题参见理科第 20 题的第 (1) 小题．*

解 (1) 由椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得椭圆方程为

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

再由点 $(2,\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上可解得椭圆方程为

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{4}=1,\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{4}=1,$$

两式相减得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{8}+\frac{y_1^2-y_2^2}{4}=0,$$

整理得

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2},$$

即直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值 $-\dfrac{1}{2}$.

拓展 也可以利用仿射变换解决，参见理科第 20 题的拓展．

2.6 值域的长度

理科第 20 题． 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$．

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

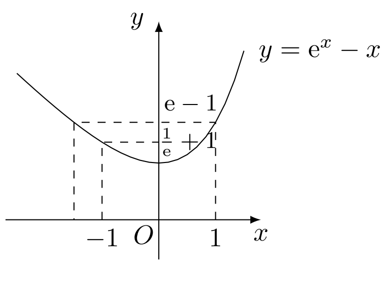
(2) 若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$，求 m 的取值范围．

分析 第 (1) 小题为常规的利用导函数研究函数的单调性的问题．第 (2) 小题用全称命题描述了函数在区间 $[-1,1]$ 上的"极差"(区间上的连续函数图象在 y 轴上的投影长度) 问题，实际上就是需要分析最大值与最小值，使得它们的差不超过 $\mathrm{e}-1$．

解 (1) 根据题意 $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=m\mathrm{e}^{mx}+2x-m,$$
注意到 $f'(0)=0$，于是进而求 $f'(x)$ 的导函数
$$f''(x)=m^2\mathrm{e}^{mx}+2,$$
由于 $f''(x)>0$，于是 $y=f'(x)$ 为单调递增函数，结合 $f'(0)=0$，有 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒小于 0，在 $(0,+\infty)$ 上恒大于 0．因此原命题得证．

(2) 根据题意，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值之差不超过 $\mathrm{e}-1$．由第 (1) 小题可知 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值为 $f(0)=1$，于是问题转化为 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不超过 e．

根据第 (1) 小题，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 中较大者，因此 m 满足
$$\begin{cases}f(1)\leqslant \mathrm{e},\\ f(-1)\leqslant \mathrm{e},\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\mathrm{e}^m+1-m\leqslant \mathrm{e},\\ \mathrm{e}^{-m}+1+m\leqslant \mathrm{e},\end{cases}$$
记函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-x$，则上述不等式即
$$\begin{cases}g(m)\leqslant g(1),\\ g(-m)\leqslant g(1).\end{cases}$$
由 $g(x)$ 的导函数
$$g'(x)=\mathrm{e}^x-1,$$
可得 $g(x)$ 在 $x<0$ 时单调递减，在 $x>0$ 时单调递增，如图．



因此不难解得 m 的取值范围为 $[-1,1]$．

文科第 **21** 题．　已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围．

分析 *第 (1) 小题为利用导函数研究函数单调性的问题，第 (2) 小题为利用导函数研究函数最大值的问题，均属于常规问题．*

解　(1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot(-ax+1),$$

因此按 a 与 0 的关系展开讨论．

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ ，于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上 $f'(x)>0$ ，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上 $f'(x)<0$ ，于是函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减．

(2) 根据第 (1) 小题的结论，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1.$$

根据题意，有

$$-\ln a+a-1>2a-2,$$

即

$$-\ln a-a+1>0.$$

记左边函数为 $g(a)=-\ln a-a+1$ ，则该函数为 $(0,+\infty)$ 上的单调递减函数，且 $g(1)=0$ ．于是所求的 a 的取值范围是 $(0,1)$.

第三章　安徽卷

3.1　正弦值的估算

理科第 10 题．　已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A ， ω ， φ 均为正的常数) 的最小正周期为 π ，当 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，则下列结论正确的是 (　　)

A. $f(2)<f(-2)<f(0)$　　B. $f(0)<f(2)<f(-2)$

C. $f(-2)<f(0)<f(2)$　　D. $f(2)<f(0)<f(-2)$

分析　根据已知， $f(x)=A\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ，于是只需要比较

$$\sin\left(4+\frac{\pi}{6}\right),\sin\left(-4+\frac{\pi}{6}\right),\sin\frac{\pi}{6}$$

的大小关系．

取 $\pi\approx 3.14$ 进行估算，则

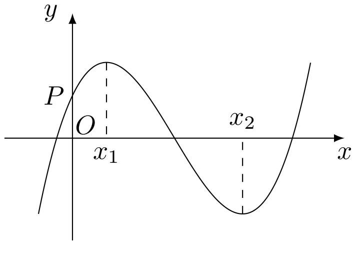
$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\pi}{6}\approx\sin 0.52,\\
&\sin\left(4+\frac{\pi}{6}\right)\approx\sin 4.52\approx-\sin 1.38,\\
&\sin\left(-4+\frac{\pi}{6}\right)\approx\sin(-3.48)=\sin 0.34,
\end{aligned}$$

而 $-\sin 1.38<\sin 0.34<\sin 0.52$ ，于是 $f(2)<f(-2)<f(0)$ ．

解　A

3.2　望闻问切

文科第 10 题．　函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是 (　　)



A. $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$　　B. $a>0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$

C. $a<0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$　　D. $a>0$，$b>0$，$c>0$，$d<0$

分析 首先由 $f(0)>0$ 以及当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，可得 $d>0$，$a>0$.
接下来分析 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c,$$

函数 $f(x)$ 的两个极值点 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 是其导函数 $f'(x)$ 的两个零点，于是

$$x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}>0, x_1\cdot x_2=\frac{c}{3a}>0,$$

从而 $b<0$，$c>0$.

解 A

拓展 本题也可以根据三次方程的韦达定理判断.

3.3 唯一的实根

理科第 15 题. 设 $x^3+ax+b=0$，其中 a,b 均为实数，下列条件中，使得该三次方程仅有一个实根的是________.（写出所有正确条件的编号）

①$a=-3$，$b=-3$；

②$a=-3$，$b=2$；

③$a=-3$，$b>2$；

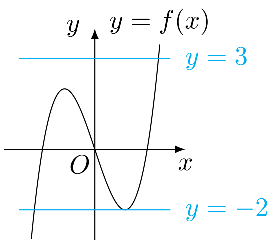
④$a=0$，$b=2$；

⑤$a=1$，$b=2$.

分析 将三次方程的实根看成是函数 $f(x)=x^3+ax$ 的图象与直线 $y=-b$ 的公共点的横坐标.
当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 为单调递增函数，且值域为 $\mathbf{R}$，因此无论 b 为何值，直线 $y=-b$ 与函数 $f(x)=x^3+ax$ 的图象均有唯一公共点. 这样 ④ 和 ⑤ 显然正确；
注意到其他条件中 a 的取值均为 -3，因此研究函数 $f(x)=x^3-3x$.
函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=3(x+1)(x-1),$$

于是函数 $f(x)$ 有极大值点 $x=-1$ 以及极小值点 $x=1$，对应的极大值为 2，极小值为 -2，如图.



因此 ① 和 ③ 正确，而 ② 错误

解　①③④⑤

3.4　从图中来，到图中去

文科第 15 题．　$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，已知向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 满足 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$ ，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$ ，则下列结论中正确的是________．(写出所有正确结论的序号)

① $\vec{a}$ 为单位向量;

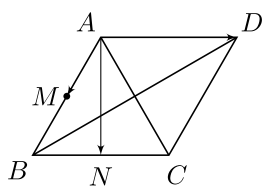
② $\vec{b}$ 为单位向量;

③ $\vec{a}\perp\vec{b}$;

④ $\vec{b}\parallel\overrightarrow{BC}$;

⑤ $\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\overrightarrow{BC}$.

分析　*根据题意可得* $\vec{a}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ ．*如图，在边长为* 2 *的菱形* $ABCD$ *中*，$\angle ABC=60^\circ$ ，M *为* AB *中点，则有* $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ ，$\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.



此时容易判断 ①④*正确，而* ②③ *错误;*

*对于*⑤，*取线段* BC *的中点* N ，*有* $2\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=\overrightarrow{AN}$ ，*而* $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{BC}$ ，*因此* $\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\overrightarrow{BC}$.

解　①④⑤

3.5　双阶乘

理科第 18 题．　设 $n\in\mathbf{N}^*$ ，x_n 是曲线 $y=x^{2n+2}+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标．

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $T_n=x_1^2x_3^2\cdots x_{2n-1}^2$ ，证明：$T_n\geqslant\dfrac{1}{4n}$.

分析　*第 (1) 小题是常规的求曲线的切线方程的问题．第 (2) 小题需要证明一个级数不等式，分析通项即可解决．*

解　(1) 函数 $y=x^{2n+2}+1$ 的导函数为

$$y'=(2n+2)x^{2n+1},$$

于是在点 $(1,2)$ 处的切线方程为

$$y=(2n+2)(x-1)+2,$$

其与 x 轴交点的横坐标为 $x_n=\dfrac{n}{n+1}\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$.

(2) 根据第 (1) 小题的结果，只需要证明

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\geqslant\frac{1}{4n}.$$

当 $n=1$ 时，左右两边均为 $\frac{1}{4}$ ，于是不等式成立；
注意到右边可以写成

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8}\cdots\frac{4(n-1)}{4n},$$

于是只需要证明

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\geqslant\frac{4(n-1)}{4n}.$$

用分析法易证上述不等式成立，因此原不等式得证.

拓展　也可以利用不等式 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$ ，其中 $0<a<b$ ， $m>0$ (证明从略). 不等式左边

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{4n},$$

因此原不等式得证.
另一方面，有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1},$$

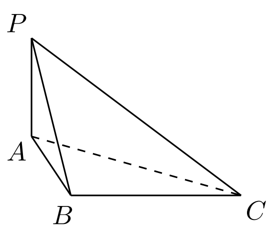
因此我们有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

即 $\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ，这是一个常见的级数不等式练习题.

3.6　寻找垂直

文科第 19 题.　如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC ，$PA=1$ ，$AB=1$ ，$AC=2$ ，$\angle BAC=60^\circ$.



(1) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积；
(2) 证明：在线段 PC 上存在点 M ，使得 $AC\perp BM$ ，并求 $\frac{PM}{MC}$ 的值.

分析　对于三棱锥 $P-ABC$ 而言，一方面高 PA 已经给定，另一方面底面 ABC 给了两边及其夹角，面积易求，因此第 *(1)* 小题很简单. 对于第 *(2)* 小题，我们可以利用三垂线定理将异面直线的垂直判定转化为

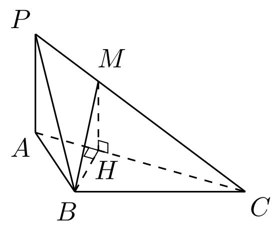
共面直线的垂直判定加以解决.

解　(1) 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

$$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\right)\cdot PA=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(2) 在底面 ABC 内，过 B 作 AC 的垂线，垂足为 H，在三角形 PAC 内，过 H 作 AC 的垂线与 PC 相交，则交点即为所求的 M，证明如下.

因为 $MH\perp AC$，$BH\perp AC$，MH 与 BH 交于 H，所以 $AC\perp$ 平面 MBH，进而有 $AC\perp BM$.



在 $\triangle PAC$ 中，由于 $MH\parallel PA$，于是

$$\frac{PM}{MC}=\frac{AH}{HC}=\frac{AB\cdot\cos 60^\circ}{AC-AB\cdot\cos 60^\circ}=\frac{1}{3}.$$

3.7　复合函数

理科第 21 题.　设函数 $f(x)=x^2-ax+b$.

(1) 讨论函数 $f(\sin x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值;

(2) 记 $f_0(x)=x^2-a_0x+b_0$，求函数 $|f(\sin x)-f_0(\sin x)|$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 D;

(3) 在 (2) 中，取 $a_0=b_0=0$，求 $z=b-\frac{a^2}{4}$ 满足条件 $D\leqslant 1$ 时的最大值.

分析　*第 (1) 小题是判断复合函数的单调性的问题，得到单调性后可以顺势探索极值. 第 (2) 小题可以将 $\sin x$ 放缩，然后利用绝对值不等式得到最大值. 第 (3) 小题是第 (2) 小题的继续，本意是考查规划方法，但是利用不等式放缩反而更直接.*

解　(1) 考虑复合函数的单调性，有

当 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，没有极值;

当 $-2<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\arcsin\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\arcsin\frac{a}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，有极小值 $b-\frac{a^2}{4}$;

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，没有极值.

(2) 令 $t=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $t\in[-1,1]$，且

$$\begin{aligned}|f(\sin x)-f_0(\sin x)|&=|(a_0-a)t+b-b_0|\\&\leqslant|a-a_0|\cdot|t|+|b-b_0|\\&\leqslant|a-a_0|+|b-b_0|,\end{aligned}$$

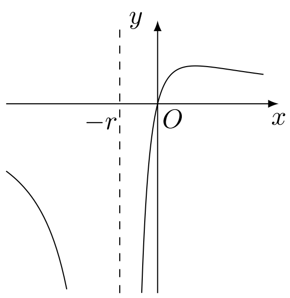
第一处等号当 $(a_0-a)t$ 与 $b-b_0$ 同号时可以取得，第二处等号当 $t=\pm 1$ 时可以取得.
显然两处等号可以同时取得，因此最大值 D 为 $|a-a_0|+|b-b_0|$.
(3) 根据题意，$|a|+|b|\leqslant 1$ ，此时
$$z=b-\frac{a^2}{4}\leqslant b\leqslant |b|\leqslant 1,$$
当 $a=0$ 且 $b=1$ 时，等号均能取得. 因此 z 的最大值为 1 .

3.8 二次分式函数

文科第 **21** 题. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{(x+r)^2}$ ($a>0$ ， $r>0$).
(1) 求 $f(x)$ 的定义域，并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $\dfrac{a}{r}=400$ ，求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的极值.

分析 *第 (1) 小题是利用导函数研究函数的单调性问题，第 (2) 小题是利用导函数研究函数的极值问题，都属于常规问题.*

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-r)\cup(-r,+\infty)$ ，导函数
$$f'(x)=-\frac{a(x+r)(x-r)}{(x+r)^4},$$
于是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-r)$ 上单调递减，在 $(-r,r)$ 上单调递增，在 $(r,+\infty)$ 上单调递减，如图.

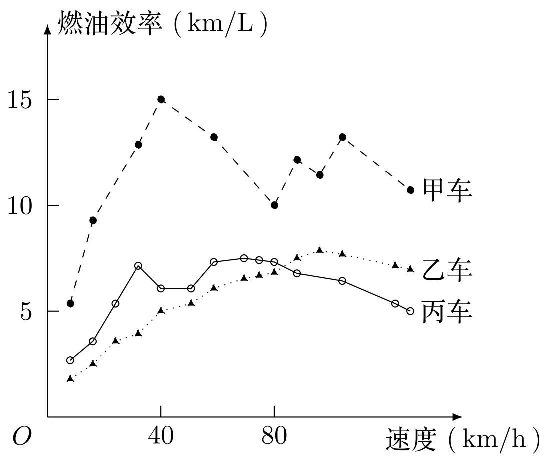


(2) 根据第 (1) 小题的结果，函数 $f(x)$ 在 $x=r$ 处取得极大值
$$f(r)=\frac{ar}{(2r)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{r}=100.$$

第四章 北京卷

4.1 燃油效率

理科第 8 题． 汽车的"燃油效率"，是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程，下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况．下列叙述中正确的是（　　）



A. 消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米

B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多

C. 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油

D. 某城市机动车最高限速 80 千米/小时．相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油

分析 根据图中给出的数据，逐一验证选项即可．

对于选项 A，乙车的最高燃油效率大于 $5\ \mathrm{km/L}$，于是消耗 1 升汽油，乙车最多行驶里程大于 5 千米；

对于选项 B，以相同速度行驶时，甲车的燃油效率始终是三辆车中最高的，因此行驶相同的里程时消耗的燃油最少；

对于选项 C，甲车以 $80\ \mathrm{km/h}$ 的速度行驶 1 小时，行驶的里程为 $80\ \mathrm{km}$，而燃油效率为 $10\ \mathrm{km/L}$，于是需要 $8\ \mathrm{L}$ 汽油；

对于选项 D，在限速 $80\ \mathrm{km/h}$ 的条件下，丙车的燃油效率始终比乙车高，因此更省油．

题中给了很多不相干的数据，这从侧面增加了题目的难度．

解　D

4.2 累计里程

文科第 8 题． 某辆汽车每次加油都把油箱加满，下表记录了该车相邻两次加油时的情况．

加油时间	加油量 (升)	加油时的累计里程 (千米)
2015 年 5 月 1 日	12	35000
2015 年 5 月 15 日	48	35600

注:“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程．在这段时间内，该车每 100 千米平均耗油量为 (　　)

A. 6 升　　B. 8 升　　C. 10 升　　D. 12 升

分析 *按照实际情形理解问题．*

两次加油的间隔中，汽车行驶了 $35600-35000=600$ *(千米)，而消耗的油量为* 48 *升，因此每* 100 *千米的耗油量为* $48\div 6=8$ *(升)．*

题中给了一个不相干的数据“12”，这从侧面增加了题目的难度．

解　B

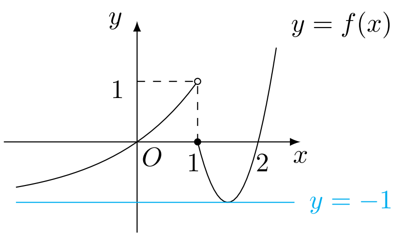
4.3 含参分段函数

理科第 14 题． 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x<1,\\ 4(x-a)(x-2a), & x\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 若 $a=1$，则 $f(x)$ 的最小值为________；

(2) 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是________．

分析 *(1) 当* $a=1$ *时，函数* $f(x)$ *的图象如图，最小值为* -1 *．*



(2) 分段考虑函数 $f(x)$ *的零点．*

第一段，直线 $x=1$ *左侧．*

$y=2^x-a$ *单调递增，且在* $x<1$ *时的取值范围为* $(-a,2-a)$ *，于是只有当* $0<a<2$ *时函数* $f(x)$ *在直线* $x=1$ *左侧存在零点．*

第二段，直线 $x=1$ *右侧 (含* $x=1$ *)．*

考虑 $y=4(x-a)(x-2a)$ *的两个零点* $x=a$ *和* $x=2a$ *，分别与* $x=1$ *进行比较，划分区间讨论，可得*

函数 $f(x)$ 在 $x \geqslant 1$ 时的零点个数为

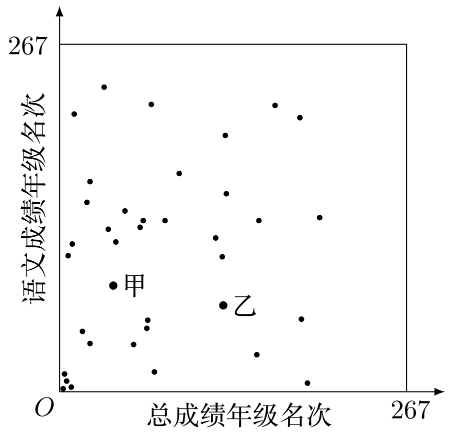
$$\begin{cases} 0, & 2a<1, \\ 1, & a<1 \leqslant 2a, \\ 2, & 1 \leqslant a. \end{cases}$$

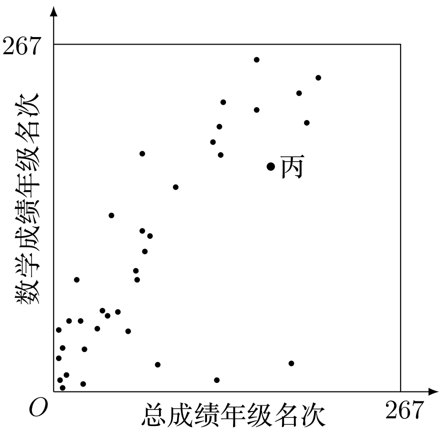
综合以上，可得函数 $f(x)$ 恰有两个零点时，a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},1\right) \cup [2,+\infty)$.

解　(1) -1；(2) $\left[\frac{1}{2},1\right) \cup [2,+\infty)$.

4.4　成绩排名

文科第 14 题.　高三年级 267 位学生参加期末考试，某班 37 位学生的语文成绩、数学成绩与总成绩在全年级中的排名情况如图所示，甲、乙、丙为该班三位学生.



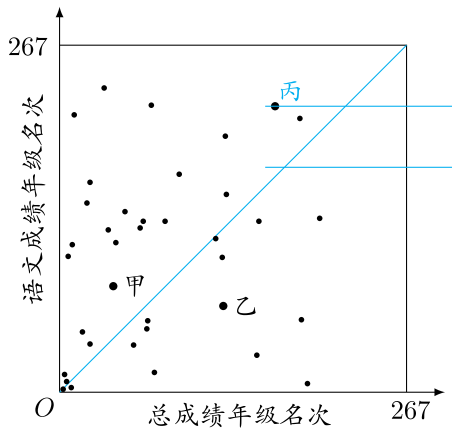


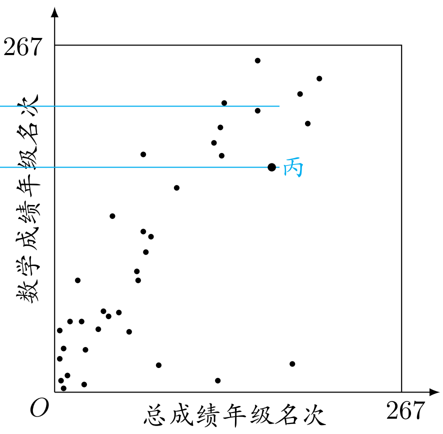
从这次考试成绩看，

(1) 在甲、乙两人中，其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是________；

(2) 在语文和数学两个科目中，丙同学的成绩名次更靠前的科目是________.

分析　从第一张图可以看出甲的总成绩年级名次比乙靠前，但语文成绩年级名次比乙靠后．从第二张图可以看出丙的总成绩在其所在的班级的排名为倒数第 5 名，因此对比其在第一张图中对应点的纵坐标和第二张图中对应的纵坐标可得数学的年级排名相对靠前，如图.





解　(1) 乙；(2) 数学.

4.5 泰勒展开

理科第 18 题. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求证:当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)>2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$;

(3) 设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立,求 k 的最大值.

分析 *第 (1) 小题是利用导函数求曲线切线方程的问题,第 (2) 小题是利用导函数证明函数不等式的问题,第 (3) 小题是典型的恒成立问题,均属于常规问题.*

解 (1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2},$$

于是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为

$$y=f'(0)(x-0)+f(0),$$

即 $y=2x$.

(2) 令 $g(x)=f(x)-2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$,则 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=\frac{2}{1-x^2}-2(1+x^2)=\frac{2x^4}{1-x^2},$$

当 $x\in(0,1)$ 时,恒有 $g'(x)>0$,于是 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,从而

$$g(x)>g(0)=0,$$

原不等式得证.

(3) 令 $h(x)=f(x)-k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$,则 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=\frac{2}{1-x^2}-k(1+x^2)=\frac{kx^4+(2-k)}{1-x^2}.$$

注意到 $h(0)=0$,于是 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒有 $h(x)>0$ 的一个必要条件是 $h'(0)\geqslant0$,即 $k\leqslant2$. 证明如下:

若不然, $k>2$,此时函数 $h(x)$ 在 $\left(0,\sqrt[4]{\dfrac{k-2}{k}}\right)$ 上单调递减 (注意,其中 $\sqrt[4]{\dfrac{k-2}{k}}<1$),于是

$$h\left(\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}\right)<h(0)=0,$$

不符合题意.

再由第 (2) 小题的结论,可得 k 的最大值为 2 .

拓展　事实上，我们对函数 $f(x)=\ln(1+x)\ (-1<x<1)$ 有泰勒展开式：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

因此亦有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

两式相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right),$$

这是估算自然对数的重要公式.

4.6　唯一的零点

文科第 **19** 题.　设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-k\ln x$ ，$k>0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{\mathrm{e}}]$ 上仅有一个零点.

分析　*第 (1) 小题是利用导函数研究函数的单调性与极值的问题，第 (2) 小题是利用导函数研究函数的零点的问题，均属于常规问题．第 (2) 小题需要证明在某区间上零点个数唯一，因此还需要考查在该区间上函数的单调性.*

解　(1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{x^2-k}{x}=\frac{x+\sqrt{k}}{x}\cdot(x-\sqrt{k}),x>0,$$

因此函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\sqrt{k})$ ，单调递增区间是 $(\sqrt{k},+\infty)$ ，在 $x=\sqrt{k}$ 处取得极小值为 $f(\sqrt{k})=\dfrac{1}{2}k(1-\ln k)$.

(2) 若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 的极小值，亦为最小值满足

$$f(\sqrt{k})\leqslant 0,\quad \text{即 } k\geqslant \mathrm{e}.$$

此时 $f(x)$ 在 $(1,\sqrt{\mathrm{e}}]$ 上单调递减，且 $f(1)=\dfrac{1}{2}>0$ ，$f(\sqrt{\mathrm{e}})=\dfrac{\mathrm{e}-k}{2}\leqslant 0$ ，因此 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{\mathrm{e}}]$ 上有且仅有一个零点，原命题得证.

4.7　周期数列

理科第 **20** 题.　已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1\in\mathbf{N}^*$ ，$a_1\leqslant 36$ ，且

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\leqslant 18,\\ 2a_n-36, & a_n>18\end{cases}(n=1,2,\cdots).$$

记集合 $M=\{a_n|n\in\mathbf{N}^*\}$.

(1) 若 $a_1=6$ ，写出集合 M 的所有元素;

(2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，证明：M 的所有元素都是 3 的倍数；

(3) 求集合 M 的元素个数的最大值.

分析 第 *(1)* 小题是为了让解题者熟悉递推公式的铺垫题，第 *(2)* 小题指出了数列的取值集合 M 的重要特征，都比较简单. 对于第 *(3)* 小题，由于首项 a_1 的取值范围只包含 36 个数，因此可以采用列举的思路. 注意到递推公式中无论 a_n 与 18 的大小关系如何，均会将 a_n 乘以 2，所以结合 a_n 从第二项起均为偶数可以使列举的过程大幅缩短.

解 (1) 当 $a_1=6$ 时，数列按以下规律变化：

$$6\to 12\to 24\to 12\to 24\to\cdots$$

因此集合 M 的所有元素为 $6,12,24$.

(2) 容易推出

引理 **1** 若 $3|a_n$ ，则 $3|a_{n+1}$.

引理 **2** 如果 $3\nmid a_n$ ，则 $3\nmid a_{n+1}$.

于是若集合 M 中存在一个元素为 3 的倍数，也即存在某个 a_p 能被 3 整除，那么由引理 **1**，当 $n\geqslant p$ 时，$3|a_n$. 接下来用反证法证明当 $n<p$ 时，$3|a_n$.

若不然，设存在 a_q ，$q<p$ 且 $3\nmid a_q$ ，则由引理 **2**，当 $n\geqslant q$ 时，$3\nmid a_n$ ，而 $3|a_p$ ，矛盾.

因此原命题得证.

(3) 首先证明 M 的元素个数不可能多于 8 .

容易知道，$1\leqslant a_n\leqslant 36, n\in\mathbf{N}^*$ 且当 $n\geqslant 3$ 时，$4|a_n$. 接下来利用这一性质讨论不同的初值下，数列 $\{a_n\}$ 中的第 3 项以及以后的项在集合 M 中产生的新元素.

若 $3|a_1$ ，则由引理 **1**，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $3|a_n$ ，于是 $12|a_n$ ，即 $a_n\in\{12,24,36\}\,(n\geqslant 3)$，此时 M 的元素个数不可能多于 5；

若 $3\nmid a_1$ ，则由引理 **2**，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $3\nmid a_n$ ，于是 $a_n\in\{4,8,16,20,28,32\}\,(n\geqslant 3)$，此时 M 的元素个数不可能多于 8 .

综上，M 中的元素个数不可能多于 8 .

事实上，取 $a_1=1$ ，则有 $M=\{1,2,4,8,16,32,28,20\}$ 恰好含有 8 个元素，因此所求集合 M 的元素个数的最大值为 8 .

4.8 定比点差

文科第 20 题. 已知椭圆 $C:x^2+3y^2=3$ ，过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A ，B 两点，直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M .

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 若 AB 垂直于 x 轴，求直线 BM 的斜率；

(3) 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系，并说明理由.

分析 第 *(1)* 小题考查椭圆的方程与基本量，第 *(2)* 小题考查简单的坐标计算. 从第 *(2)* 小题给出的特殊情形可以猜测第 *(3)* 小题中 BM 与 DE 平行，合理引入参数证明运动中的不变量即可.

解　(1) 椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) 根据题意，设 $A(1,t)$ ， $B(1,-t)$ ， $M(3,m)$ ，则由 A,E,M 三点共线有

$$\frac{t-1}{1-2}=\frac{m-1}{3-2},$$

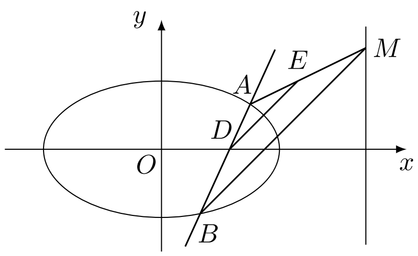
即

$$m+t=2.$$

从而直线 BM 的斜率为

$$\frac{m-(-t)}{3-1}=\frac{m+t}{2}=1.$$

(3) 直线 BM 与 DE 平行，证明如下.



设[1] $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$ ， $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，则

$$D\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)=(1,0),$$

于是

$$x_1+\lambda x_2=1+\lambda, y_1+\lambda y_2=0.$$

由已知，有

$$x_1^2+3y_1^2=3,\lambda^2x_2^2+3\lambda^2y_2^2=3\lambda^2,$$

两式相减得

$$(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)+3(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)=3(1+\lambda)(1-\lambda),$$

应用 D 点坐标，可得

$$x_1-\lambda x_2=3-3\lambda,$$

进而

$$x_1=2-\lambda.$$

于是

$$\frac{AE}{EM}=\frac{2-x_1}{3-2}=\lambda,$$

根据平行线截割定理的逆定理可知，直线 DE 与直线 BM 平行.

[1]详见附录『定比点差法』

第五章　重庆卷

5.1　垂心与通径

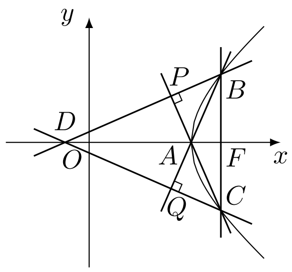
理科第 10 题．　设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，右顶点为 A，过 F 作 AF 的垂线与双曲线交于 B,C 两点，过 B,C 分别作 AC,AB 的垂线，两垂线交于点 D．若 D 到直线 BC 的距离小于 $a+\sqrt{a^2+b^2}$，则该双曲线的渐近线斜率的取值范围是（　　）

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$　　　　D. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

分析 过双曲线的焦点且垂直于实轴的弦称为双曲线的通径，其长度为 $2\cdot\dfrac{b^2}{a}$．

根据题意有 $A(a,0)$，$B\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，$C\left(c,-\dfrac{b^2}{a}\right)$，$D(m,0)$．



由 $CA\perp BD$ 可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，从而

$$\left(c-a,-\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(c-m,\frac{b^2}{a}\right)=0,$$

即

$$(c-a)(c-m)=\frac{b^4}{a^2}.$$

题目要求 D 到直线 BC 的距离小于 $a+\sqrt{a^2+b^2}$，即 $m>-a$，因此

$$\frac{b^4}{a^2}=(c-a)(c-m)<(c-a)(c+a)=b^2,$$

进而 $\dfrac{b^2}{a^2}<1$，于是双曲线的渐近线斜率的取值范围是 $(-1,0)\cup(0,1)$．

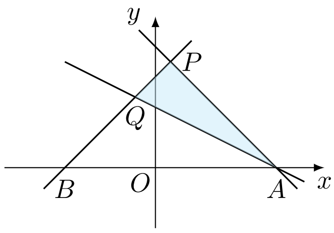
解　A

5.2 规划区域

文科第 10 题. 若不等式组 $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0, \\ x+2y-2\geqslant 0, \\ x-y+2m\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为三角形，且其面积等于 $\dfrac{4}{3}$，则 m 的值为 (　　)

A. -3　　B. 1　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. 3

分析 如图，画出不等式组表示的平面区域，直线 $x+y-2=0$ 和直线 $x+2y-2=0$ 均交 x 轴于 $A(2,0)$，直线 $x-y+2m=0$ 与直线 $x+y-2=0$、直线 $x+2y-2=0$ 和 x 轴分别交于点 P、Q 和 B.



根据题意，当 B 点位于 A 点左侧，即 $-2m<2$ 时，不等式组表示三角形区域 ($\triangle APQ$ 的边界以及内部)，此时区域面积为

$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle PBA}-S_{\triangle QBA}=\frac{1}{2}\cdot(x_A-x_B)\cdot(y_P-y_Q),$$

经计算可得

$$x_B=-2m, y_P=m+1, y_Q=\frac{2}{3}(m+1),$$

因此

$$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\cdot(2+2m)\cdot\frac{1}{3}(m+1)=\frac{4}{3},$$

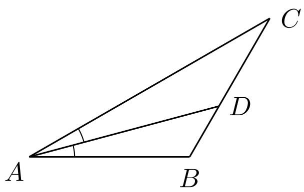
解得 $m=-3$ (舍去)，或 $m=1$.

解 B

5.3 角平分线

理科第 13 题. 在 $\triangle ABC$ 中，$B=120^\circ$，$AB=\sqrt{2}$，A 的角平分线 $AD=\sqrt{3}$，则 $AC=$________.

分析 根据已知示意图如下.



$\triangle ABD$ 中，应用正弦定理，得

$$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB},$$

从而可得

$$\sin\angle ADB=\frac{AB}{AD}\cdot\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此 $\angle ADB=45^\circ$ ，进而

$$\angle ACB=\angle CAB=30^\circ,$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，其底边 AC 的长为

$$2\cos 30^\circ\cdot AB=\sqrt{6}.$$

解　$\sqrt{6}$

5.4　两个负根

文科第 **15** 题．　在区间 $[0,5]$ 上随机地选择一个数 p，则方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的概率为________．

分析 题中的关于 x 的二次方程有两个负根 x_1,x_2，等价于

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2<0,\\ x_1\cdot x_2>0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}(2p)^2-4\cdot(3p-2)\geqslant 0,\\ -2p<0,\\ 3p-2>0,\end{cases}$$

解得

$$\frac{2}{3}<p\leqslant 1,\text{或}p\geqslant 2,$$

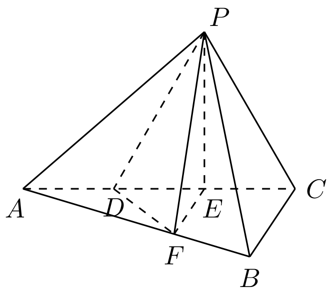
因此由几何概型，所求的概率为

$$\frac{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)+(5-2)}{5-0}=\frac{2}{3}.$$

解　$\dfrac{2}{3}$

5.5　大棱锥与小棱锥

文科第 **20** 题．　如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，点 D,E 在线段 AC 上，且 $AD=DE=EC=2$，$PD=PC=4$，点 F 在线段 AB 上，且 $EF\parallel BC$．



(1) 证明：$AB\perp$ 平面 PFE；

(2) 若四棱锥 $P-DFBC$ 的体积为 7，求线段 BC 的长.

分析 第 *(1)* 小题是典型的线面垂直的证明题，第 *(2)* 小题通过给定几何体的体积确定底面形状，均属于常规问题.

解 (1) 在 $\triangle PCD$ 中，$PD=PC, DE=EC$，于是 $PE\perp CD$.
又平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且两平面的交线为 AC，于是 $PE\perp$ 平面 ABC，进而 $PE\perp AB$.
在 $\triangle ABC$ 中，$EF\parallel BC$，而 $AB\perp BC$，因此 $AB\perp EF$.
综上，AB 垂直于平面 PFE 中的两条相交直线 PE 和 EF，因此 $AB\perp$ 平面 PEF.
(2) 根据第 (1) 小题的结论，线段 PE 是四棱锥 $P-DFBC$ 的高，且 $PE=2\sqrt{3}$，因此由四棱锥 $P-DFBC$ 的体积为 7 可得底面 $DFBC$ 的面积为 $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.
在底面 ABC 上有

$$S_{\triangle FAD}=S_{\triangle FDE},\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AE}{AC}\right)^2=\frac{4}{9},$$

于是

$$\frac{S_{DFBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{7}{9},$$

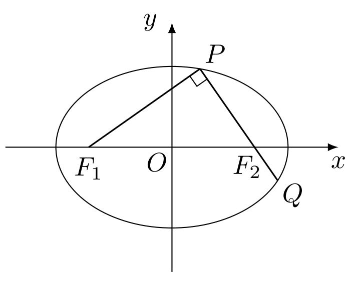
因此 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.
这样我们就得到了方程

$$\frac{1}{2}BC\cdot\sqrt{AC^2-BC^2}=\frac{9\sqrt{3}}{2},$$

解得 $BC=3$，或 $BC=3\sqrt{3}$.

5.6 第一定义

理科第 21 题. 如图，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 的直线交椭圆于 P、Q 两点，且 $PQ\perp PF_1$.



(1) 若 $|PF_1| = 2+\sqrt{2}$ ，$|PF_2| = 2-\sqrt{2}$ ，求椭圆的标准方程；
(2) 若 $|PF_1| = |PQ|$ ，求椭圆的离心率 e .

分析 *第 (1) 小题是在焦点三角形 PF_1F_2 中考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题. 第 (2) 小题中恰当的表达 Q 在椭圆上以及利用几何条件解三角形是解决问题的关键.*

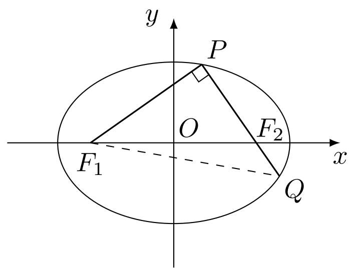
解　(1) 根据题意，有

$$2a = |PF_1| + |PF_2| = (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2}) = 4,$$

而

$$2c = |F_1F_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PF_2|^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3},$$

因此椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
(2) 连接 QF_1 ，并设 $|PF_1| = m$ ，$|PF_2| = n$.



由 $\triangle PF_1Q$ 是等腰直角三角形得

$$|QF_2| = m-n, |QF_1| = \sqrt{2}m.$$

由椭圆的定义，有

$$|PF_1| + |PF_2| = |QF_1| + |QF_2|,$$

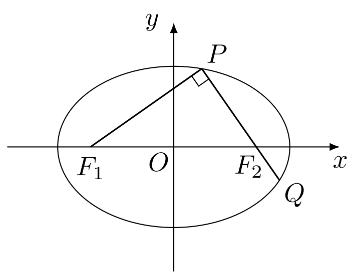
即

$$m+n = \sqrt{2}m + (m-n),$$

从而 $m = \sqrt{2}n$.
因此椭圆的离心率

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}n\right)^2 + n^2}}{\sqrt{2}n+n} = \sqrt{6}-\sqrt{3}.$$

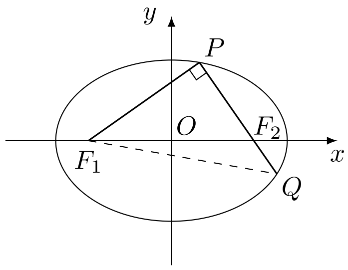
文科第 **21** 题.　如图，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 ，F_2 ，过 F_2 的直线交椭圆于 P ，Q 两点，且 $PQ \perp PF_1$.



(1) 若 $|PF_1|=2+\sqrt{2}$ ，$|PF_2|=2-\sqrt{2}$ ，求椭圆的标准方程；
(2) 若 $|PQ|=\lambda|PF_1|$ ，且 $\dfrac{3}{4}\leqslant\lambda<\dfrac{4}{3}$ ，试确定椭圆离心率 e 的取值范围.

分析 第 *(1)* 小题与理科第 *21* 题的第 *(1)* 小题相同，是在焦点三角形 PF_1F_2 中考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题. 第 *(2)* 小题是理科第 *21* 题的第 *(2)* 小题的加强，恰当的表达 Q 在椭圆上以及利用几何条件解三角形是解决问题的关键.

解 (1) 参见理科第 21 题.
(2) 连接 QF_1 ，并设 $|PF_1|=m$ ，$|PF_2|=n$.



由 $\big|PQ\big|=\lambda\big|PF_1\big|$ 及 $\triangle PF_1Q$ 是直角三角形得

$$|QF_2|=\lambda m-n,|QF_1|=\sqrt{1+\lambda^2}m.$$

由椭圆的定义，有

$$|PF_1|+|PF_2|=|QF_1|+|QF_2|,$$

即

$$m+n=\sqrt{1+\lambda^2}m+(\lambda m-n),$$

从而

$$\frac{n}{m}=\frac{1}{2}\left(\lambda-1+\sqrt{1+\lambda^2}\right).$$

当 $\lambda\in\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{3}\right)$ 时，由于 $\dfrac{n}{m}$ 随着 λ 的增大而增大，于是 $\dfrac{n}{m}$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.
进而椭圆的离心率

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}}},$$

我们熟知函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减 (可以由导函数 $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$ 说明)，因此当 $\dfrac{n}{m}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}$ 随着 $\dfrac{n}{m}$ 的增大而减小，于是 $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}$ 的取值范围是 $\left(2,\dfrac{5}{2}\right]$.
于是椭圆的离心率 e 的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right]$.

5.7 重新估计

理科第 22 题. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$ ，$a_{n+1}a_n+\lambda a_{n+1}+\mu a_n^2=0\,(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 若 $\lambda=0$ ，$\mu=-2$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\lambda=\dfrac{1}{k_0}\,(k_0\in\mathbf{N}^*,k_0\geqslant 2)$ ， $\mu=-1$ ，证明： $2+\dfrac{1}{3k_0+1}<a_{k_0+1}<2+\dfrac{1}{2k_0+1}$.

分析 第 *(1)* 小题给定了含参递推公式中的参数，因此是一个典型的由递推公式求通项公式的问题．第 *(2)* 小题让我们估计数列中某一项的范围，而事实上，我们常常利用数列的粗略的界以及递推公式得到更精细的界，并且这一过程可以再次进行 *(*付出的计算量也会越来越大*)*.

解　(1) 根据已知，有 $a_{n+1}a_n=2a_n^2$ ，由 $a_1=3$ 不难推得

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,a_n\neq 0,$$

于是 $a_{n+1}=2a_n,n\in\mathbf{N}^*$ ，进而

$$a_n=3\cdot 2^{n-1},n\in\mathbf{N}^*.$$

(2) 根据条件，有 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n+\lambda}$ ，于是

$$a_{n+1}-a_n=\frac{-\lambda a_n}{a_n+\lambda}<0,$$

于是 $\{a_n\}$ 单调递减，进而可得

$$0<a_n\leqslant a_1=3,$$

由 $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{\lambda a_n}{a_n+\lambda}$ ，又等式右边关于 a_n 单调递减，因此 $a_2-a_1=-\dfrac{3\lambda}{3+\lambda}$ ，且

$$-\frac{3\lambda}{3+\lambda}<a_{n+1}-a_n<0,n=2,3\cdots$$

累加得

$$-\frac{3n\lambda}{3+\lambda}<a_{n+1}-3<0,n\geqslant 2$$

即

$$3-\frac{3n\lambda}{3+\lambda}<a_{n+1}<3,n\geqslant 2.$$

将 $\lambda=\dfrac{1}{k_0}$ ， $n=k_0$ 代入即得

$$2+\frac{1}{3k_0+1}<a_{k_0+1}<3.$$

利用上面得到的界 (当 $2\leqslant n\leqslant k_0+1$ 时， $2<a_n<3$) 重新估计，有

$$a_{n+1}-a_n<-\frac{2k_0^{-1}}{2+k_0^{-1}},n=1,2,\cdots k_0,$$

累加得

$$a_{k_0+1}-3<-\frac{2}{2+k_0^{-1}},$$

即

$$a_{k_0+1}<2+\frac{1}{2k_0+1}.$$

综上，原命题得证.

第六章　福建卷

6.1　明察秋毫

理科第 10 题．　若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$，则下列结论中一定错误的是 (　　)

A. $f\left(\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{1}{k}$　　B. $f\left(\dfrac{1}{k}\right)>\dfrac{1}{k-1}$

C. $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)<\dfrac{1}{k-1}$　　D. $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)>\dfrac{k}{k-1}$

分析　导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k$，这提示我们构造函数 $g(x)=f(x)-kx$，该函数满足 $g(0)=-1$，且 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．

由于 $\dfrac{1}{k-1}>\dfrac{1}{k}>0$，于是有

$$g\left(\frac{1}{k-1}\right)>g\left(\frac{1}{k}\right)>g(0),$$

即

$$f\left(\frac{1}{k-1}\right)-\frac{k}{k-1}>f\left(\frac{1}{k}\right)-1>-1,$$

因此有

$$f\left(\frac{1}{k}\right)>0, f\left(\frac{1}{k-1}\right)>\frac{1}{k-1},$$

故选项 C 的结论一定错误．

解　C

6.2　充分? 必要?

文科第 12 题．　"对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k\sin x\cos x<x$"是"$k<1$"的 (　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

分析　记 $p:\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), k\sin x\cos x<x$，$q:k<1$，则 p 等价于

$$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), k\sin 2x<2x,$$

我们熟知对任意 $x>0$，均有 $\sin x<x$，因此 $k=1$ 符合条件，但此时并不满足 $k<1$，因此 p 是 q 的不充分条件；

而另一方面，若 $k<1$，则 $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), k\sin 2x<\sin 2x<2x$，因此 p 是 q 的必要条件.

综上，p 是 q 的必要不充分条件.

解　B

6.3 奇偶校验

理科第 15 题.　一个二元码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1x_2\cdots x_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $x_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 称为第 k 位码元. 二元码是通信中常用的码，但在通信过程中有时会发生码元错误 (即码元由 0 变为 1，或者由 1 变为 0).

已知某种二元码 $x_1x_2\cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组：

$$\begin{cases}x_4\oplus x_5\oplus x_6\oplus x_7=0,\\ x_2\oplus x_3\oplus x_6\oplus x_7=0,\\ x_1\oplus x_3\oplus x_5\oplus x_7=0,\end{cases}$$

其中运算 $\oplus$ 定义为：$0\oplus 0=0$，$0\oplus 1=1$，$1\oplus 0=1$，$1\oplus 1=0$. 现已知一个这种二元码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101，那么利用上述校验方程组可判定 k 等于________.

分析　首先计算校验方程组

$$\begin{cases}x_4\oplus x_5\oplus x_6\oplus x_7=1,\\ x_2\oplus x_3\oplus x_6\oplus x_7=0,\\ x_1\oplus x_3\oplus x_5\oplus x_7=1,\end{cases}\quad \text{于是}\quad \begin{cases}k\in\{4,5,6,7\},\\ k\notin\{2,3,6,7\},\\ k\in\{1,3,5,7\},\end{cases}$$

从而判定 $k=5$.

解　5

拓展　事实上，新定义的运算“$\oplus$”即逻辑中的异或运算“xor”，而若干码元的连续异或运算

$$a_1 \text{ xor } a_2 \text{ xor } \cdots \text{ xor } a_n$$

的结果为

$$\begin{cases}1, a_i(i=1,2,\cdots,n)\text{ 中有奇数个 }1,\\ 0, a_i(i=1,2,\cdots,n)\text{ 中有偶数个 }1,\end{cases}$$

因此这种校验方式又称“奇偶校验 (Parity Check)”.

6.4　翻云覆雨

文科第 16 题.　若 a，b 是函数 $f(x)=x^2-px+q\,(p>0,\ q>0)$ 的两个不同的零点，且 a，b，-2 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $p+q$ 的值等于________.

分析　根据题意有 $a+b=p>0$，且 $ab=q>0$，于是 $a,b>0$，不妨设 $0<a<b$，则不难分析得 $-2,a,b$ 成等差数列，且 $a,-2,b$ 成等比数列，从而有

$$\begin{cases}b-2=2a,\\ ab=4,\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}a=1,\\ b=4,\end{cases}$$

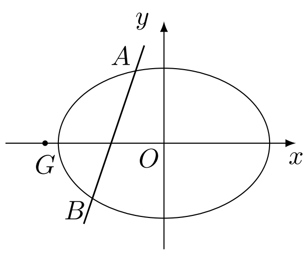
从而

$$p+q=a+b+ab=9.$$

解　9

6.5　张角与圆内外

理科第 18 题.　已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 过点 $(0,\sqrt{2})$，且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设直线 $l:x=my-1\,(m\in\mathbf{R})$ 交椭圆于 A,B 两点，判断点 $G\left(-\dfrac{9}{4},0\right)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由.

分析　第 *(1)* 小题考查椭圆的方程与基本量．第 *(2)* 小题需要恰当的将点与圆的位置关系代数化，在这一过程中平面向量的数量积是重要的桥梁.

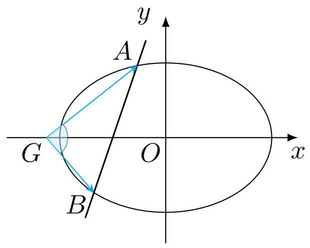
解　(1) 根据题意，$b=\sqrt{2}$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，于是椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线 AB 的方程与椭圆方程，有

$$(m^2+2)y^2-2my-3=0,$$

从而

$$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+2},y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}.$$



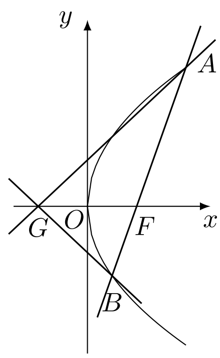
另一方面，考虑

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}&=\left(x_1+\frac{9}{4}\right)\left(x_2+\frac{9}{4}\right)+y_1y_2\\&=\left(my_1+\frac{5}{4}\right)\left(my_2+\frac{5}{4}\right)+y_1y_2\\&=(m^2+1)\cdot y_1y_2+\frac{5m}{4}\cdot(y_1+y_2)+\frac{25}{16}\\&=(m^2+1)\cdot\frac{-3}{m^2+2}+\frac{5m}{4}\cdot\frac{2m}{m^2+2}+\frac{25}{16}\\&=\frac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0,\end{aligned}$$

又 G,A,B 三点不共线，于是 $\angle AGB$ 为锐角，因此 G 点在以线段 AB 为直径的圆外.

6.6 拨云见日

文科第 19 题. 已知点 F 为抛物线 $E:y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点，点 $A(2,m)$ 在抛物线 E 上，且 $|AF|=3$.



(1) 求抛物线 E 的方程；

(2) 已知点 $G(-1,0)$ ，延长 AF 交抛物线 E 于点 B ，证明：以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆，必与直线 GB 相切.

分析 *第 (1) 小题考查抛物线的定义与方程，属于常规问题. 第 (2) 小题可以先将问题转化为点 F 到直线 GA 与到直线 GB 的距离相等，也即 $\angle AGF=\angle BGF$ ，进一步转化为证明直线 AG 与直线 BG 的斜率互为相反数即可.*

解 (1) 根据抛物线的定义，有 $|AF|=2+\dfrac{p}{2}$ ，于是 $p=2$ ，所以抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 条件“以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆同时与直线 GB 相切”等价于“直线 AG 与直线 BG 的斜率互为相反数”.

根据题意，有 $A(2,2\sqrt{2})$ ， $F(1,0)$ ，因此 $AB: y=2\sqrt{2}(x-1)$.
联立直线 AB 的方程与抛物线方程可得[1] $B\left(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$ ，于是 AG 的斜率与 BG 的斜率之和为

$$\frac{2\sqrt{2}-0}{2-(-1)}+\frac{-\sqrt{2}-0}{\dfrac{1}{2}-(-1)}=0,$$

因此命题得证.

拓展　结论可以推广为直线 AB 恒过定点 $M(m,0)$ 时，记 $N(-m,0)$ ，则 $\angle ANM=\angle BNM$.

6.7　瓮中捉鳖

理科第 20 题.　已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$ ， $g(x)=kx(k\in\mathbf{R})$.
(1) 证明：当 $x>0$ 时， $f(x)<x$;
(2) 证明：当 $k<1$ 时，存在 $x_0>0$ ，使得对任意的 $x\in(0,x_0)$ ，恒有 $f(x)>g(x)$;
(3) 确定 k 的所有可能取值，使得存在 $t>0$ ，对任意的 $x\in(0,t)$ ，恒有 $|f(x)-g(x)|<x^2$.

分析 *第 (1) 小题是简单的不含参的函数不等式问题，直接移项考察单调性即可．第 (2) 小题需要证明当 $k<1$ 时， $f(x)-g(x)$ 在 $x=0$ 的右邻域内的保号性，可以通过证明更强的单调性加以解决．第 (3) 小题通过转化后仍然是给定了函数在 $x=0$ 的右邻域内的保号性，亦可通过研究在 $x=0$ 附近的单调性加以解决.*

解　(1) 根据题意，当 $x>0$ 时，有

$$(f(x)-x)'=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0,$$

因此函数 $y=f(x)-x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，因此

$$f(x)-x<f(0)-0=0,$$

原命题得证.
(2) 第一种情形，当 $k\leqslant 0$ 时，取 $x_0=1$ ，则在区间 $(0,x_0)$ 内，恒有 $\ln(1+x)>0\geqslant kx$ ，命题成立.
第二种情形， $0<k<1$ 时，考虑到

$$(f(x)-g(x))'=\frac{1}{x+1}-k,$$

于是当 $0<x<\dfrac{1}{k}-1$ 时必然有

$$(f(x)-g(x))'>0,$$

所以函数 $f(x)-g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{k}-1\right)$ 上单调递增，又 $f(0)-g(0)=0$ ，于是取 $x_0=\dfrac{1}{k}-1$ 即可证明命题成立.

[1]详见附录『抛物线的性质』

综上，原命题得证.

(3) 根据题意在区间 $(0,t)$ 上，有

$$-x^2 < f(x)-g(x) < x^2,$$

即

$$\begin{cases}\ln(1+x)-kx-x^2<0,\\ \ln(1+x)-kx+x^2>0,\end{cases}$$

记 $h_1(x)=\ln(1+x)-kx-x^2$ ， $h_2(x)=\ln(1+x)-kx+x^2$ ，此时注意到

$$h_1(0)=h_2(0)=0,$$

于是考虑它们的导函数

$$\begin{aligned}h_1'(x)&=\frac{1}{1+x}-k-2x=-\frac{2x^2+(2+k)x+k-1}{1+x},\\ h_2'(x)&=\frac{1}{1+x}-k+2x=\frac{2x^2+(2-k)x-k+1}{1+x},\end{aligned}$$

注意到

$$h_1'(0)=h_2'(0)=-k+1,$$

于是按 k 与 1 的大小讨论.

当 $k<1$ 时，考虑函数 $h_1(x)$ ，在区间 $\left(0,\dfrac{-(2+k)+\sqrt{(2+k)^2+8(1-k)}}{4}\right)$ 上有 $h_1'(x)>0$ ，于是 $h_1(x)$ 在该区间上单调递增，从而在该区间上 $h_1(x)>h_1(0)=0$ ，不符合题意；

当 $k>1$ 时，考虑函数 $h_2(x)$ ，在区间 $\left(0,\dfrac{-(2-k)+\sqrt{(2-k)^2+8(k-1)}}{4}\right)$ 上有 $h_2'(x)<0$ ，于是 $h_2(x)$ 在该区间上单调递减，从而在该区间上 $h_2(x)<h_2(0)=0$ ，不符合题意；

当 $k=1$ 时，函数 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 的导函数分别为

$$h_1'(x)=-\frac{x(2x+3)}{1+x},h_2'(x)=\frac{x(2x+1)}{1+x},$$

于是在区间 $(0,+\infty)$ 上有 $h_1'(x)<0$ ， $h_2'(x)>0$ ，因此函数 $h_1(x)$ 单调递减， $h_2(x)$ 单调递增，结合 $h_1(0)=h_2(0)=0$ ，有

$$h_1(x)<0<h_2(x),$$

符合题意.

综上， k 的所有可能取值为 $k=1$.

文科第 **22** 题． 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{(x-1)^2}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 证明：当 $x>1$ 时， $f(x)<x-1$ ；

(3) 确定实数 k 的所有可能取值，使得存在 $x_0>1$ ，当 $x\in(1,x_0)$ 时，恒有 $f(x)>k(x-1)$.

分析 *第 (1) 小题是利用导函数研究函数的单调性问题，第 (2) 小题是利用导函数证明函数不等式问题，均*

属于常规问题．第 (3) 小题需要确定参数 k 的取值范围，使得函数 $f(x)-k(x-1)$ 在 $x=1$ 的右邻域内保号，可以借助更强的单调性解决．

解　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{1}{x}-(x-1)=-\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),$$

于是 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$．

(2) 只需要证明 $\forall x>1$，$\ln x-\dfrac{1}{2}(x-1)^2-(x-1)<0$．

令左侧函数为 $g(x)$，则

$$g'(x)=\frac{1}{x}-(x-1)-1=\frac{1+x}{x}\cdot(1-x)<0,$$

因此 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而

$$g(x)<g(1)=0,$$

命题得证．

(3) 记 $h(x)=f(x)-k(x-1)=\ln x-\dfrac{1}{2}(x-1)^2-k(x-1)$，则函数 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=\frac{-x^2+(1-k)x+1}{x},$$

考虑到 $h'(1)=1-k$，于是按 k 和 1 的大小关系讨论．

第一种情形，$k<1$ 时，在区间 $\left(1,\dfrac{1-k+\sqrt{(k-1)^2+4}}{2}\right)$ 上，有 $h'(x)>0$，于是取

$$x_0=\frac{1-k+\sqrt{(k-1)^2+4}}{2},$$

就有函数 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上满足

$$h(x)>h(1)=0,$$

符合题意．

第二种情形，$k\geqslant 1$ 时，根据第 (2) 小题的结论，在区间 $(1,+\infty)$ 上，均有

$$f(x)<x-1\leqslant k(x-1),$$

不符合题意．

综上 k 的取值范围是 $(-\infty,1)$．

第七章　广东卷

7.1　平起平坐

理科第 8 题.　若空间中 n 个不同的点两两距离都相等，则正整数 n 的取值 (　　)

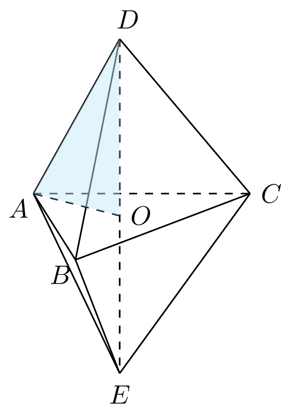
A. 至多等于 3　　B. 至多等于 4

C. 等于 5　　D. 大于 5

分析　由平面上的正三角形联想到空间的正四面体，可知正整数 n 可以取 4，排除 A、C、D，选 B.

下面证明 n 不可能大于 4，只需要证明 n 不可能取得 5，用反证法.

设空间五点 A,B,C,D,E 中任意两点的距离都相等，那么 $\triangle ABC$ 一定为正三角形，设其中心为 O.



由于 D,E 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点的距离相等，因此 D,E 都在平面 ABC 在 O 处的法线上，且 D,E 分居平面 ABC 的两侧，于是 $OD=OE=\dfrac{1}{2}AB$，但另一方面

$$OD=\sqrt{AD^2-OA^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot AB,$$

矛盾.

因此 n 不能大于 4.

解　B

7.2 构造与计数

文科第 10 题. 若集合

$$E=\{(p,q,r,s)\mid 0\leqslant p<s\leqslant 4,0\leqslant q<s\leqslant 4,0\leqslant r<s\leqslant 4 \text{ 且 } p,q,r,s\in\mathbf{N}\},$$
$$F=\{(t,u,v,w)\mid 0\leqslant t<u\leqslant 4,0\leqslant v<w\leqslant 4 \text{ 且 } t,u,v,w\in\mathbf{N}\},$$

用 $\operatorname{card}(X)$ 表示集合 X 中元素个数，则 $\operatorname{card}(E)+\operatorname{card}(F)=($ $)$

A. 200　　B. 150　　C. 100　　D. 50

分析 E 中的元素个数可以按 s 的取值分类计数，而 F 中的元素个数可以先在 $\{0,1,2,3,4\}$ 中选取两组数 (每组数包含 2 个数字)，然后将两组数分别比较大小后分配给 t,u,v,w 即可．因此

$$\operatorname{card}(E)+\operatorname{card}(F)=1^3+2^3+3^3+4^3+\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_5^2=200.$$

解 A

7.3 二项分布

理科第 13 题. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$，若 $E(X)=30$，$D(X)=20$，则 $p=$________.

分析 对于二项分布 $X\sim B(n,p)$，我们有 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$，于是

$$\begin{cases} np=30,\\ np(1-p)=20,\end{cases}$$

解得 $p=\dfrac{1}{3}$．

解 $\dfrac{1}{3}$

7.4 等比数列

文科第 13 题. 若三个正数 a,b,c 成等比数列，其中 $a=5+2\sqrt{6}$，$c=5-2\sqrt{6}$，则 $b=$________.

分析 根据题意，有 $b=\sqrt{ac}=\sqrt{(5+2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})}=1$．

解 1

7.5 残缺的圆

理科第 20 题/文科第 20 题. 已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1:x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A,B．

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标;

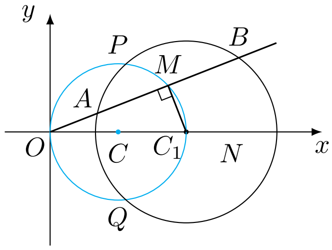
(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;

(3) 是否存在实数 k 使得直线 $L: y=k(x-4)$ 与曲线 C 只有一个公共点[1]? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

分析 第 (1) 小题考查圆的方程, 属于常规问题. 第 (2) 小题利用垂径定理处理与弦的中点相关的轨迹问题, 尤其需要注意确定轨迹方程中变量的取值范围. 第 (3) 小题意在考查第 (2) 小题是否正确的求解了轨迹方程中变量的取值范围, 难度反而不如第 (2) 小题大.

解　(1) 圆 C_1 的标准方程为 $C_1:(x-3)^2+y^2=4$, 因此圆 C_1 的圆心坐标为 $(3,0)$.

(2) 由垂径定理知 $AB\perp C_1M$, 因此 $\angle OMC_1$ 始终为直角, 于是 M 的轨迹是以 OC_1 为直径的圆在圆 C_1 内 (不包含交点) 的部分, 如图.



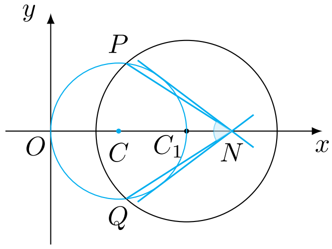
设以 OC_1 为直径的圆为圆 C, 则

$$C: x(x-3)+y^2=0.$$

联立圆 C 的方程与圆 C_1 的方程, 可得它们的交点坐标为 $P\left(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $Q\left(\frac{5}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, 因此所求的轨迹方程为

$$x^2-3x+y^2=0\ \left(\frac{5}{3}<x\leqslant 3\right).$$

(3) 设 $N(4,0)$, 过 N 作圆 C 的切线 $y=m(x-4)$.



由

$$\frac{\left|\frac{3}{2}m-4m\right|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{3}{2},$$

解得 $m=\pm\frac{3}{4}$.

而直线 NQ, NP 的斜率为 $\pm\frac{2\sqrt{5}}{7}$, 因此 k 的取值范围是 $\left[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}\right]\cup\left\{\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right\}$.

拓展　以 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 为直径的圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

[1]原题此处为"交点", 为了避免歧义, 在这里改为了"公共点"

7.6 阿贝尔求和

理科第 21 题． 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+na_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$ ， $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 令 $b_1=a_1$ ， $b_n=\dfrac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)a_n\,(n\geqslant 2)$ ，证明：数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n<2+2\ln n$.

分析 *第 (1) 小题是为了让解题者熟悉数列的递推公式，事实上可以直接通过差分求出数列的通项．第 (2) 小题在第 (1) 小题的基础上求出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．第 (3) 小题需要先将新定义的数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和求出，然后再证明不等式．在求和的过程中可以利用数列 $\{T_n\}$ 作为中间媒介 (第 (2) 小题的提示作用)，也可以利用阿贝尔求和．*

解 (1) 当 $n=1$ 时，$a_1=1$;

当 $n\geqslant 2$ 时，根据已知可得

$$na_n=\left(4-\frac{n+2}{2^{n-1}}\right)-\left(4-\frac{n+1}{2^{n-2}}\right)=\frac{n}{2^{n-1}},$$

于是 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ，从而 $\forall n\in\mathbf{N}^*,a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ，于是 $a_3=\dfrac{1}{4}$.

(2) 由 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$ 得 $T_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(3) 不妨记 $T_0=0$ ，这样就有

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,b_n=\frac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}b_k&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{T_{k-1}}{k}+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)a_k\right]\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\cdot(T_k-T_{k-1})+\frac{T_{k-1}}{k}\right]\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot T_n\\&<2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

因此只需要证明

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n.$$

引理 $\forall x\in(0,1),x<\ln\dfrac{1}{1-x}.$

引理的证明 令 $f(x)=x-\ln\dfrac{1}{1-x}$ ，即 $f(x)=x+\ln(1-x)$ ， $0\leqslant x<1$ ，则其导函数

$$f'(x)=1+\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}\leqslant 0,$$

因此 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，因此当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<f(0)=0$ ，引理得证．
在引理中分别令 $x=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n}$ ，累加即得欲证不等式，因此命题得证．

拓展　第 (3) 小题可以采用阿贝尔求和的方式求解：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\\&=1\cdot 1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\\&=1\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\\&=1\cdot T_n+\frac{1}{2}\cdot(T_n-T_1)+\cdots+\frac{1}{n}\cdot(T_n-T_{n-1}),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{k-1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot T_n.\end{aligned}$$

7.7　分段函数的零点

文科第 **21** 题．　设 a 为实数，函数 $f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a(a-1)$ ．
(1) 若 $f(0)\leqslant 1$ ，求 a 的取值范围；
(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
(3) 当 $a\geqslant 2$ 时，讨论 $f(x)+\dfrac{4}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的零点个数．

分析　*第 (1) 小题为简单的解不等式问题；第 (2) 小题为分段函数的单调性问题 (当然也可以看作复合函数加以解决，但注意到第 (3) 小题的设问方式，不如在这里就分段完毕)；第 (3) 小题是利用导函数研究函数的零点问题，可以转化为单调性问题和极值最值问题．*

解　(1) 根据题意，$f(0)=|a|+a\leqslant 1$ ，于是 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ ．
(2) 根据已知，有

$$f(x)=\begin{cases}x^2-(2a+1)x+2a, & x<a,\\ x^2-(2a-1)x, & x\geqslant a.\end{cases}$$

注意到两段抛物线的对称轴分别为 $x=a+\dfrac{1}{2}$ 和 $x=a-\dfrac{1}{2}$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增．
(3) 设 $g(x)=f(x)+\dfrac{4}{x}$ ，由于 $f(x)$ 需要分段讨论，因此分段讨论 $g(x)$ ．
当 $x<a$ 时，函数 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=2x-(2a+1)-\frac{4}{x^2}=2(x-a)-1-\frac{4}{x^2}<0,$$

因此函数 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减；

当 $x=a$ 时，$g(a)=-a^2+a+\dfrac{4}{a}=\dfrac{a^2+a+2}{a}\cdot(2-a)$；
当 $x>a$ 时，函数 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=2x-(2a-1)-\frac{4}{x^2}=2(x-a)+\frac{x^2-4}{x^2}>0,$$

因此函数 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.
因此，$g(a)$ 为函数 $g(x)$ 的最小值.
第一种情况，当 $a=2$ 时，$g(a)=0$，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为 1；
第二种情况，当 $a>2$ 时，$g(a)<0$，在区间 $(0,a)$ 上，函数

$$g(x)>x^2-(2a+1)x+2a=(x-1)(x-2a),$$

于是 $g(1)>0$，因此函数 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上有 1 个零点；
在区间 $(a,+\infty)$ 上，函数

$$g(x)>x^2-(2a-1)x=x(x-2a+1),$$

于是 $g(2a)>0$，因此函数 $g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上有 1 个零点.
综上，当 $a=2$ 时，函数 $f(x)+\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 1 个零点；当 $a>2$ 时，函数 $f(x)+\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点.

第八章　湖北卷

8.1　层峦叠嶂

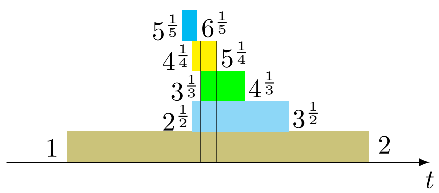
理科第 10 题． 设 $x\in\mathbf{R}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，若存在实数 t，使得 $[t]=1$，$\left[t^2\right]=2$，$\cdots$，$[t^n]=n$ 同时成立，则正整数 n 的最大值是（　　）

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

分析　如图，将 $[t^n]=n$ 的解

$$n^{\frac{1}{n}}\leqslant t<(n+1)^{\frac{1}{n}}，其中\ n=1,2,\cdots$$

分别标在数轴上（注意幂的大小比较，如比较 $2^{\frac{1}{2}}$ 和 $3^{\frac{1}{3}}$ 时可以通过比较 2^3 和 3^2 进行），记这些区间分别为 $A_1,A_2,\cdots$，则有 $\bigcap_{k=1}^{4}A_k=\left[3^{\frac{1}{3}},5^{\frac{1}{4}}\right)$，而 $\bigcap_{k=1}^{5}A_k=\varnothing$．于是所求正整数 n 的最大值是 4．



解　B

拓展　从中可以看到数列 $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ 先递增再递减，在 $n=3$ 时取得最大值；而数列 $\{(n+1)^{\frac{1}{n}}\}$ 单调递减．事实上，前者可以通过函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 即 $y=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减得到；而后者可以通过函数 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 即 $y=\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减得到．

8.2　斗转星移

文科第 10 题． 已知集合

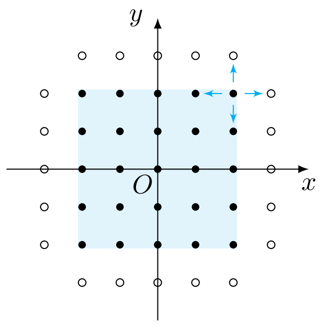
$$A=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x,y\in\mathbf{Z}\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\middle||x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2,x,y\in\mathbf{Z}\right\},$$

定义集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\mid(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$，则 $A\oplus B$ 中元素的个数为（　　）

A. 77　　　　B. 49　　　　C. 45　　　　D. 30

分析 集合 A 包含 5 个元素 $\{(0,1),(0,-1),(-1,0),(1,0),(0,0)\}$，而集合 B 表示一个 5×5 的点阵. 根据 $A\oplus B$ 的定义可知，如果将 $A\oplus$ 理解为某个操作，那么这个操作作用于单个点时，就是将这个点向上、向下、向左、向右平移一个单位以及维持不动后得到 5 个点. 于是当 $A\oplus$ 作用于一个点集时，就是将这个点集向上、向下、向左、向右平移一个单位以及维持不动后得到新的点集，如图.

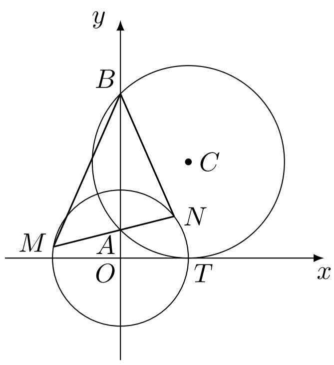


不难得到，新的点集比原来多出 20 个点，因此共有 45 个元素.

解 C

8.3 阿波罗尼斯圆

理科第 14 题. 如图，圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1,0)$，与 y 轴正半轴交于两点 A，B(B 在 A 的上方)，且 $|AB|=2$.



(1) 圆 C 的标准方程为________;

(2) 过点 A 任作一条直线与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 M，N 两点，下列三个结论：

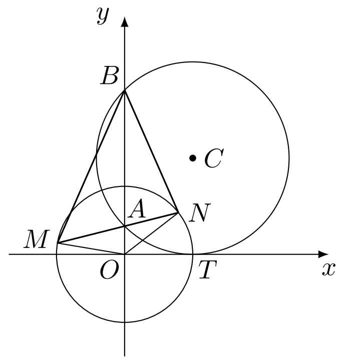
① $\dfrac{|NA|}{|NB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$；② $\dfrac{|NB|}{|NA|}-\dfrac{|MA|}{|MB|}=2$；③ $\dfrac{|NB|}{|NA|}+\dfrac{|MA|}{|MB|}=2\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是________.（写出所有正确结论的序号）

分析 *(1)* 由于圆 C 与 x 轴相切于 $(1,0)$，于是弦 AB 与圆心的距离为 1，进而可得圆的半径为 $\sqrt{2}$，于是圆 C 的方程为

$$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=2.$$

(2) 不难求得点 $A\left(0,\sqrt{2}-1\right)$，点 $B\left(0,\sqrt{2}+1\right)$，如图.



由切割线定理，有

$$|OT|^2=|OA|\cdot|OB|,$$

而 $|OT|=|OM|=|ON|$ ，因此

$$|OM|^2=|OA|\cdot|OB|,|ON|^2=|OA|\cdot|OB|,$$

从而 $\triangle OMA$ 与 $\triangle OBM$ 相似，$\triangle ONA$ 与 $\triangle OBN$ 相似，因此

$$\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{|OM|}{|OB|}=\sqrt{2}-1,\frac{|NA|}{|NB|}=\frac{|ON|}{|OB|}=\sqrt{2}-1,$$

进而可推知命题 ①②③ 均正确.

解　(1) $(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$；(2)①②③

8.4　最大值的最小值

文科第 17 题.　a 为实数，函数 $f(x)=\left|x^2-ax\right|$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a=$____ 时，$g(a)$ 的值最小.

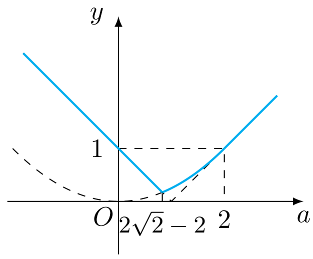
分析 易知当 $a\neq 0$ 时，函数 $f(x)=|x^2-ax|$ 在 $x=\dfrac{a}{2}$ 取得极大值，据此展开分析.

当 $\dfrac{a}{2}\in[0,1]$ 时，$g(a)$ 为 $f(0)$ ，$f(1)$ 与 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ 中的最大数，也即

$$g(a)=\max\left\{\frac{a^2}{4},|1-a|\right\},a\in[0,2];$$

当 $\dfrac{a}{2}\notin[0,1]$ 时，$g(a)$ 为 $f(0),f(1)$ 中的最大数，也即

$$g(a)=|1-a|,a\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty).$$

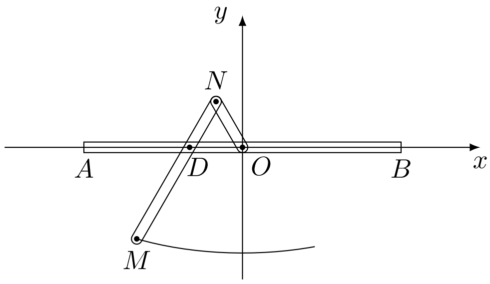


如图，计算函数 $y=|1-a|$ 与函数 $y=\dfrac{a^2}{4}$ 图象的交点可得 $a=2\sqrt{2}-2$ (右侧相切，舍去左侧左边的公共点)，因此当 $a=2\sqrt{2}-2$ 时，$g(a)$ 的值最小.

解　$2\sqrt{2}-2$

8.5　椭圆规

理科第 21 题/文科第 22 题.　一种作图工具[1]如图所示. O 是滑槽 AB 的中点，短杆 ON 可绕 O 转动，长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接，MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动，且 $DN=ON=1$，$MN=3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时，带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时，N 也不动)，M 处的笔尖画出的曲线记为 C. 以 O 为原点，AB 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系.



(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P、Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点，试探究：$\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由.

分析　第 (1) 小题是典型的轨迹问题，引入终边为 ON 的角作为参数可以简单的表示各个点的坐标，最后消参得到普通方程. 第 (2) 小题中给定的两条直线 l_1 和 l_2 在横坐标不变纵坐标变为原来的 2 倍的坐标变换[2]下互相垂直. 考虑到变换后直线与圆锥曲线的位置关系保持不变，而面积成比例的变化，因此可以考虑用伸缩变换求解.

解　(1) 设 $N(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $D(2\cos\theta,0)$，于是由 $\overrightarrow{NM}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MD}$ 得

$$M\left(\frac{x_N-\frac{3}{2}x_D}{1-\frac{3}{2}},\frac{y_N-\frac{3}{2}y_D}{1-\frac{3}{2}}\right),\text{ 即 } M(4\cos\theta,-2\sin\theta),$$

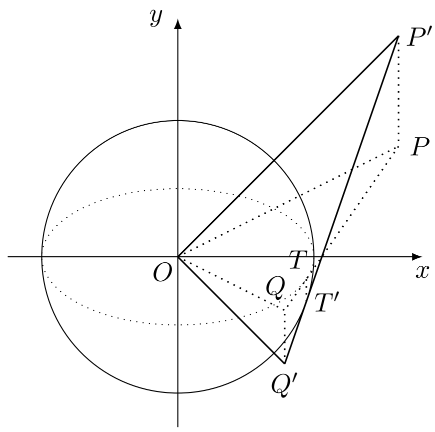
[1] 文科第 22 题中指出了轨迹为椭圆

[2] 详见附录『仿射变换』

于是可得曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) 存在最小值，最小值为 8 . 证明如下：

在伸缩变换 $x'=x$, $y'=2y$ 下，椭圆 C 变为圆 $x'^2+y'^2=16$. 在变换后直线 l_1' 和 l_2' 则变为互相垂直的直线 $x'-y'=0$ 和 $x'+y'=0$ ，记切点 T 变换后的点为 T' ，则 $P'Q'$ 与圆相切于 T' ，如图.



从而变换后的三角形 $OP'Q'$ 的面积

$$S_{\triangle OP'Q'}=\frac{1}{2}OT'\cdot P'Q'=2\left(P'T'+Q'T'\right)\geqslant 4\sqrt{P'T'\cdot Q'T'}=4OT'=16,$$

等号当 $P'T'=Q'T'$ 时取得. 因此 $\triangle OPQ$ 的面积

$$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle OP'Q'}\geqslant 8,$$

于是其最小值存在，且为 8 .

8.6　扰乱视听

文科第 21 题.　设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$,其中 e 为自然对数的底数.

(1) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式，并证明：当 $x>0$ 时， $f(x)>0$, $g(x)>1$;

(2) 设 $a\leqslant 0$, $b\geqslant 1$ ，证明：当 $x>0$ 时， $ag(x)+(1-a)<\dfrac{f(x)}{x}<bg(x)+(1-b)$.

分析　*第 (1) 小题可以通过函数奇偶性的定义得到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式，然后运用简单的上下界分析就可以证明不等式. 第 (2) 小题中先将扰乱视听的参数 a,b 放缩掉，转化为不含参的函数不等式后加以证明. 如果注意到 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$ 会使得证明更加简便.*

解　(1) 根据题意，有

$$f(-x)+g(-x)=\mathrm{e}^{-x},$$

于是

$$-f(x)+g(x)=\mathrm{e}^{-x},$$

联合 $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$ 可以解得

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},g(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

当 $x>0$ 时，有

$$\mathrm{e}^x>1>\mathrm{e}^{-x},$$

于是 $f(x)>0$.

又当 $x>0$ 时，有

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}=2,$$

且等号无法取得 (等号当且仅当 $\mathrm{e}^x=1$ ，即 $x=0$ 时取得)，于是 $g(x)>1$.

综上， $f(x)$ ， $g(x)$ 的解析式为 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ ， $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ ，且欲证不等式成立.

(2) 当 $a\leqslant 0$ ， $x>0$ 时，有

$$ag(x)+(1-a)=[g(x)-1]\cdot a+1\leqslant 1;$$

当 $b\geqslant 1$ ， $x>0$ 时，有

$$bg(x)+(1-b)=[g(x)-1]\cdot b+1\geqslant g(x);$$

因此欲证不等式即

$$1<\frac{f(x)}{x}<g(x),$$

也即

$$x<f(x)<x\cdot g(x).$$

注意到

$$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x),$$

于是

$$(f(x)-x)'=f'(x)-1=g(x)-1\geqslant 0,$$

于是函数 $f(x)-x$ 单调递增，因此

$$f(x)-x>f(0)-0=0,$$

左边的不等式得证;

另一方面

$$(x\cdot g(x)-f(x))'=g(x)+x\cdot g'(x)-f'(x)=x\cdot f(x)>0,$$

于是函数 $x\cdot g(x)-f(x)$ 单调递增，因此

$$x\cdot g(x)-f(x)>0\cdot g(0)-f(0)=0,$$

右边的不等式得证.

综上，原命题得证.

8.7　卡尔曼不等式

理科第 22 题．　已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$b_n=n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n a_n\,(n\in\mathbf{N}_+)$，e 为自然对数的底数．

(1) 求函数 $f(x)=1+x-\mathrm{e}^x$ 的单调区间，并比较 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的大小；

(2) 计算 $\dfrac{b_1}{a_1}$，$\dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\dfrac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测计算 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式，并给出证明；

(3) 令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，数列 $\{a_n\}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n，T_n，证明：$T_n<\mathrm{e}S_n$．

分析　第 (1) 小题给出函数不等式的提示，要求比较两个数的大小，只需要稍加转化即可．第 (2) 小题给出归纳通项的提示，要求证明通项，只需要整理成累乘法的代数结构即可．在第 (2) 小题的提示下，第 (3) 小题在计算和式 T_n 时可以利用数列 $\{b_n\}$ 进行中转，求和结束后再利用 b_n 和 a_n 之间的关系得到 T_n 与 S_n 之间的欲证不等式．

解　(1) 根据已知 $f'(x)=1-\mathrm{e}^x$，于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0)$，单调递减区间是 $(0,+\infty)$．因此由 $f(0)>f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 得

$$0>1+\frac{1}{n}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}},$$

整理得 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$．

(2) 根据已知 $\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$，于是

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{2^1}{1^0},\frac{b_2}{a_2}=\frac{3^2}{2^1},\frac{b_3}{a_3}=\frac{4^3}{3^2},$$

因此

$$\frac{b_1}{a_1}=2,\frac{b_1b_2}{a_1a_2}=9,\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}=64.$$

进而推测

$$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n,$$

事实上，累乘即有

$$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{2^1}{1^0}\cdot\frac{3^2}{2^1}\cdot\frac{4^3}{3^2}\cdots\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}=(n+1)^n.$$

(3) 根据已知

$$\begin{aligned}c_n&=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(n+1)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n(n+1)}\\&=b_1\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+b_2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+b_n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
T_n \leqslant\, & b_1 \cdot \left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] \\
& + b_2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]+\cdots+b_n \cdot \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
<\, & b_1+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n} \\
=\, & \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 a_1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 a_2+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n \\
<\, & \mathrm{e}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right) \\
=\, & \mathrm{e} S_n,
\end{aligned}$$

因此命题得证.

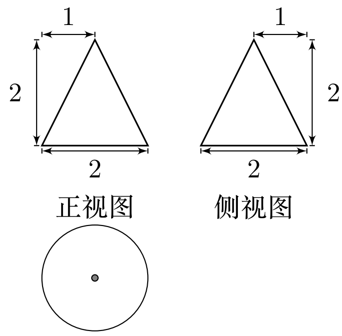
拓展　该不等式即 Carleman 不等式.

第九章　湖南卷

9.1　分步加工

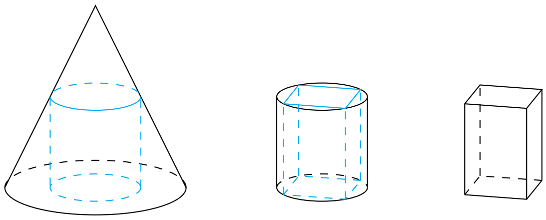
理科第 10 题．　某工件的三视图如图所示[1]．现将该工件通过切削，加工成一个体积尽可能大的长方体新工件，并使新工件的一个面落在原工件的一个面内，则原工件材料的利用率为（　　）

注：材料的利用率 $=\dfrac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$



A. $\dfrac{8}{9\pi}$　　B. $\dfrac{16}{9\pi}$　　C. $\dfrac{4\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$　　D. $\dfrac{12\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$

分析 为了能够从圆锥形的工件中加工出长方体形的工件，可以首先将圆锥加工成一个圆柱，然后从圆柱中加工成长方体．因此我们分两步计算工件的材料利用率（注意这两者的利用率互不影响），如图．

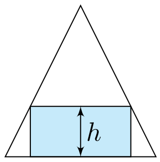


设圆柱的高为 h，则第一步的材料利用率为

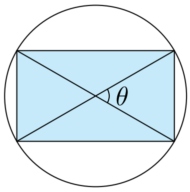
$$\frac{\pi\left(1-\dfrac{1}{2}h\right)^2\cdot h}{\dfrac{2}{3}\pi}\leqslant\frac{4}{9},$$

等号当且仅当 $1-\dfrac{1}{2}h=h$，即 $h=\dfrac{2}{3}$ 时取得（这里用到了三元的均值不等式）．

[1] 原题配图的俯视图中没有标注圆锥顶点



另一方面，第二步的材料利用率为矩形面积与圆的面积的比，当对角线夹角 $\theta = 90^\circ$ 时利用率最高，为 $\dfrac{2}{\pi}$.

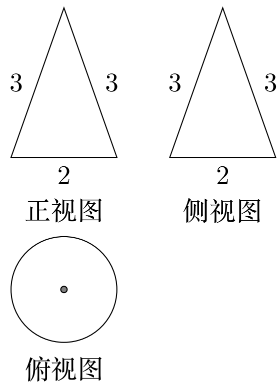


综上，工件材料的利用率最高为 $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{8}{9\pi}$.

解　A

文科第 10 题．　某工件的三视图如图所示[1]，现将该工件通过切削，加工成一个体积尽可能大的正方体新工件，并使新工件的一个面落在原工件的一个面内，则原工件材料的利用率为 (　　)

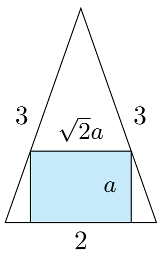
注：材料的利用率 $= \dfrac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$



A. $\dfrac{8}{9\pi}$　　B. $\dfrac{8}{27\pi}$　　C. $\dfrac{24\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$　　D. $\dfrac{8\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$

分析 这是一个典型的组合体问题，解决组合体问题的关键是选择合适的截面去分析相关的几何量，通常我们会选择包含元素最丰富的面作为研究的截面．

在本题中，正方体的下底面在圆锥的底面内，而上底面仅有四个顶点在圆锥的侧面内．因此我们选择包含圆锥的高的正方体的对角面作为分析对象，如图．



[1] 原题配图的俯视图中没有标注圆锥顶点

根据相似关系，不难求得 $a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，因此材料的利用率为

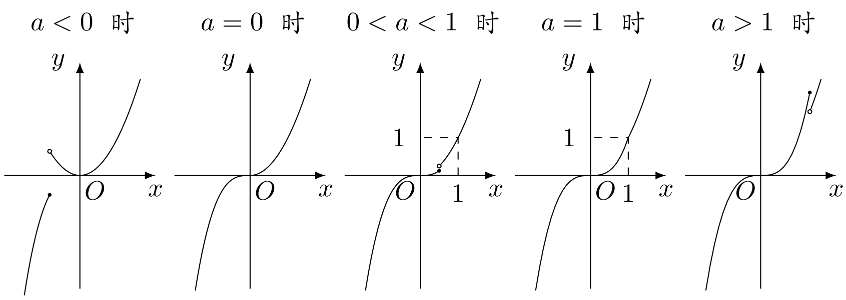
$$\frac{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3}{\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{8}{9\pi}.$$

解　A

9.2　流星赶月

理科第 15 题.　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant a,\\ x^2, & x>a,\end{cases}$ 若存在实数 b，使函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点，则 a 的取值范围是________.

分析 函数 $y=x^3$ 与 $y=x^2$ 的公共点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，因此按 a 与分界点 0 和 1 的相对大小展开讨论：



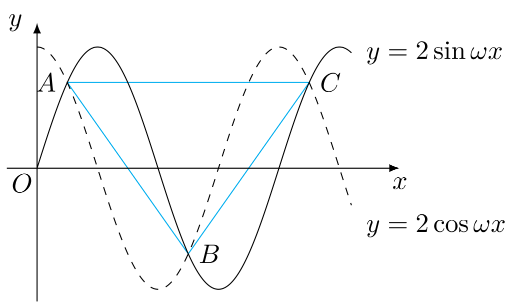
由图不难得到 a 的取值范围是 $a<0$ 或 $a>1$.

解　$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

9.3　最近的距离

文科第 15 题.　已知 $\omega>0$，在函数 $y=2\sin\omega x$ 与 $y=2\cos\omega x$ 的图象的交点中，距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$，则 $\omega=$________.

分析 注意到函数的周期性和对称性，只需要考虑两个函数在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{\omega}\right]$ 内的函数图象，如图.



由于交点的横坐标即方程 $2\sin\omega x = 2\cos\omega x$ 的解，可得 $\omega x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}\,(k \in \mathbf{Z})$，因此交点的纵坐标必然为 $\pm\sqrt{2}$. 如图，设相邻的三个交点为 $A(x_1,\sqrt{2})$ ，$B(x_2,-\sqrt{2})$ ，$C(x_3,\sqrt{2})$ ，则根据题意有[1]

$$\min\{|AB|,|AC|\} = 2\sqrt{3},$$

若 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，可得

$$\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 + (2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2,$$

解得 $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ ，此时 $|AC| = \dfrac{2\pi}{\omega} = 4 > 2\sqrt{3}$ ，符合题意.

若 $|AC| = 2\sqrt{3}$ ，可得 $\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{3}$ ，此时

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{11} < 2\sqrt{3},$$

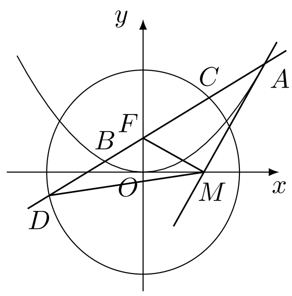
不符合题意.

因此 ω 的值为 $\dfrac{\pi}{2}$.

解 $\dfrac{\pi}{2}$

9.4 隐藏的直角

理科第 20 题. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$ 的一个焦点，C_1 与 C_2 的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$.



(1) 求 C_2 的方程；

(2) 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A,B 两点，与 C_2 相交于 C,D 两点，且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向.

(i) 若 $|AC| = |BD|$ ，求直线 l 的斜率；

(ii)[2]设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M ，证明：直线 l 绕点 F 旋转时，$\triangle MFD$ 总是钝角三角形.

分析 第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题. 第 (2) 小题的第一小问略加转化后可以转化为 $|AB| = |CD|$ (一个只和抛物线有关，另一个只和椭圆有关)，此时通过分别联立即可解决；第二小问也是略加转化，将不方便判断的 $\angle MFD$ (因为 D 和 M 的位置分别与椭圆和抛物线有关) 转化为好判断的 $\angle AFM$ (只与抛物线有关).

[1] 这是一个很容易被忽略的分类，很多地方给出的解答直接认为两个交点间的最短距离即为横坐标最接近的两个交点间的距离.

[2] 文科第 20 题没有这一小问

解　(1) 根据题意，$F(0,1)$ ，而与抛物线 $C_1: x^2=4y$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$ ，可以推得椭圆 C_2 经过点 $\left(\sqrt{6},\dfrac{3}{2}\right)$ ，因此

$$\begin{cases} a^2=b^2+1, \\ \dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a^2=9, \\ b^2=8, \end{cases}$$

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

(2)(i) 根据题意 $|AB|=|CD|$,设直线 l 的方程为 $l: y=kx+1$, A,B,C,D 的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3,x_4 .

联立直线 l 与抛物线 C_1 的方程，可得

$$x^2-4kx-4=0,$$

于是

$$|x_1-x_2|=\sqrt{16(k^2+1)};$$

联立直线 l 与椭圆 C_2 的方程，可得

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}k^2\right)x^2+\frac{2k}{9}x-\frac{8}{9}=0,$$

于是

$$|x_3-x_4|=\frac{\sqrt{\frac{4}{9}(k^2+1)}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}k^2};$$

而由 $|AB|=|CD|$ 可得

$$\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_3-x_4|,$$

因此

$$\sqrt{16(k^2+1)}=\frac{\sqrt{\frac{4}{9}(k^2+1)}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}k^2},$$

解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

(ii) 设 $A(4t,4t^2)$ ，则抛物线在点 A 处的切线斜率为函数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 在 $x=4t$ 处的导函数值，因此切线方程[1]为

$$y=2t(x-4t)+4t^2,$$

因此可得点 M 的坐标为 $M(2t,0)$.

于是

$$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FM}=(4t,4t^2-1)\cdot(2t,-1)=4t^2+1>0,$$

又 A,F,M 三点不共线，因此 $\angle AFM$ 为锐角，进而 $\angle MFD$ 为钝角，因此 $\triangle MFD$ 恒为钝角三角形.

拓展　事实上，延长 AM 交抛物线的准线于 N ，则 $\angle AFN$ 为直角.

[1]也可以参见附录『圆锥曲线的切线方程』

9.5 曲线的包络线

理科第 21 题． 已知 $a>0$，函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\sin x\,(x\in[0,+\infty))$，记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 个极值点．证明：

(1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列；

(2) 若 $a\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}$，则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$x_n<|f(x_n)|$ 恒成立．

分析 第 *(1)* 小题考查利用导函数研究函数的极值点和等比数列的概念，只需要将极值点求出即可．将第 *(1)* 小题的结果代入第 *(2)* 小题，则不等式中的变量不再是 x，而是离散的 n，此时依然可以借助函数研究问题，只不过回到变量 n 时需要考虑其离散的特性确定真正的最值位置．

解 (1) 根据题意，有 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^{ax}\left(a\sin x+\cos x\right),$$

于是

$$a\sin x_n+\cos x_n=0,$$

解得

$$x_n=n\pi-\arctan\frac{1}{a},n\in\mathbf{N}^*.$$

记 $\varphi=\arctan\dfrac{1}{a}$，则

$$f(x_n)=\mathrm{e}^{a(n\pi-\varphi)}\sin\left(n\pi-\varphi\right),$$

而

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\frac{\mathrm{e}^{a[(n+1)\pi-\varphi]}\sin\left[(n+1)\pi-\varphi\right]}{\mathrm{e}^{a(n\pi-\varphi)}\sin\left(n\pi-\varphi\right)}=-\mathrm{e}^{a\pi},$$

因此数列 $\{f(x_n)\}$ 是公比为 $-\mathrm{e}^{a\pi}$ 的等比数列．

(2) 用分析法，根据题意

$$\begin{aligned}x_n<|f(x_n)|&\Leftrightarrow n\pi-\varphi<\left|\mathrm{e}^{a(n\pi-\varphi)}\sin\left(n\pi-\varphi\right)\right|\\&\Leftrightarrow n\pi-\varphi<\mathrm{e}^{a(n\pi-\varphi)}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\\&\Leftrightarrow\sqrt{1+a^2}\cdot(n\pi-\varphi)<\mathrm{e}^{a(n\pi-\varphi)},\end{aligned}$$

令 $t=a\left(n\pi-\varphi\right)$，则只需要证明 $\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}\cdot t<\mathrm{e}^t$．

由已知条件有 $\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}\leqslant\mathrm{e}$，因此只需要证明当 $t>0$ 时，$\mathrm{e}^t>\mathrm{e}\cdot t$．令 $h(t)=\mathrm{e}^t-\mathrm{e}\cdot t$，$t>0$，则 $h(t)$ 的导函数

$$h'(t)=\mathrm{e}^t-\mathrm{e},$$

因此函数 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，因此 $h(t)\geqslant h(1)=0$，接下来这只需要证明等号无法同时取得．

事实上，等号同时取得的条件为 $a=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}$ 且 $a\left(n\pi-\arctan\dfrac{1}{a}\right)=1$ ，即

$$\arctan\sqrt{\mathrm{e}^2-1}+\sqrt{\mathrm{e}^2-1}=n\pi,$$

而

$$\frac{\pi}{3}<\arctan\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}<\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<\frac{3\pi}{2},$$

因此

$$\pi<\arctan\sqrt{\mathrm{e}^2-1}+\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<2\pi,$$

也即等号无法同时取得.

综上，原命题得证.

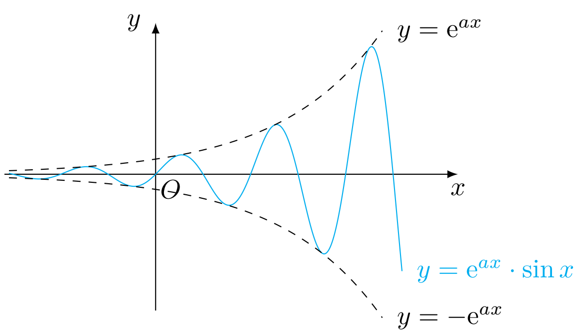
拓展　$g(x)=f(x)\cdot\sin x$ 类型的函数是一类重要的函数. 一方面有

$$-|f(x)|\leqslant g(x)\leqslant|f(x)|,$$

于是函数 $y=g(x)$ 的图象夹在 $y=|f(x)|$ 与 $y=-|f(x)|$ 的图象之间. 另一方面，注意到

$$g'(x)=f(x)\cdot\cos x+f'(x)\cdot\sin x,$$

于是 $g(x)$ 的图象与函数 $y=\pm f(x)$ 的图象相切于 $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.



文科第 **21** 题.　已知 $a>0$ ，函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x\cos x\,(x\in[0,+\infty))$. 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 个极值点.

(1) 证明：数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列；

(2) 若对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ ，$x_n\leqslant|f(x_n)|$ 恒成立，求 a 的取值范围.

分析　第 (1) 小题只需要求出极值点 x_n 的通项，然后利用等比数列的定义证明数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列即可. 第 (2) 小题中，注意到 $f(x)$ 的解析式中，a 与 x“耦合程度”很低，可以考虑用分离变量法，利用导函数研究函数的最值即可解决.

解　(1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=a\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}a\mathrm{e}^x\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right),$$

于是可得 $x_n = n\pi - \dfrac{3\pi}{4}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$.

因此 $f(x_n) = a\mathrm{e}^{n\pi - \frac{3\pi}{4}} \cdot \cos\left(n\pi - \dfrac{3\pi}{4}\right)$，从而

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = -\mathrm{e}^{\pi},$$

于是数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列.

(2) 题中条件即

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, n\pi - \frac{3\pi}{4} \leqslant \left|a\mathrm{e}^{n\pi - \frac{3\pi}{4}} \cdot \cos\left(n\pi - \frac{3\pi}{4}\right)\right|,$$

也即

$$a \geqslant \frac{\sqrt{2}x}{\mathrm{e}^x},\ \text{其中}\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \cdots, n\pi - \frac{3\pi}{4}, \cdots$$

令 $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ ，则 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x) = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x},$$

因此 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因此 a 的取值范围是

$$a \geqslant \sqrt{2} \cdot \max\left\{g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\} = \sqrt{2} \cdot g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}},$$

也即 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}, +\infty\right)$.

第十章　江苏卷

10.1　函数的叠加

第 13 题.　已知函数 $f(x)=|\ln x|$，$g(x)=\begin{cases}0,\ 0<x\leqslant 1,\\ \left|x^2-4\right|-2, x>1,\end{cases}$ 则方程 $\left|f(x)+g(x)\right|=1$ 实根的个数为________.

分析 根据题意，有

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}-\ln x, 0<x\leqslant 1,\\ \ln x+|x^2-4|-2, x>1,\end{cases}$$

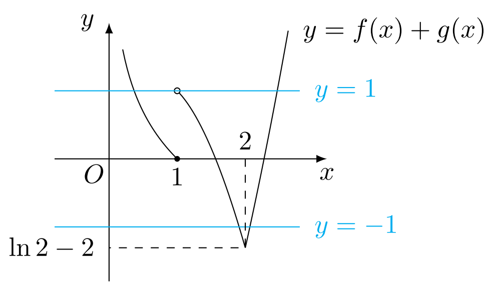
也即

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}-\ln x, 0<x\leqslant 1,\\ \ln x+2-x^2, 1<x\leqslant 2,\\ \ln x+x^2-6, x>2.\end{cases}$$

显然，该函数在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 而在 $(1,2]$ 上，导函数为

$$(f(x)+g(x))'=\frac{1}{x}-2x=\frac{1}{x}(1-2x^2)<0,$$

因此该函数在 $(1,2]$ 上单调递减，函数图象如图.



因此题中方程的实根个数为 4 .

解　4

10.2 好多数量积

第 14 题. 设向量 $\vec{a}_k=\left(\cos\dfrac{k\pi}{6},\sin\dfrac{k\pi}{6}+\cos\dfrac{k\pi}{6}\right)(k=0,1,2,\cdots,12)$，则 $\sum\limits_{k=0}^{11}(\vec{a}_k\cdot\vec{a}_{k+1})$ 的值为________.

分析 根据题意[1]有

方法一

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11}(\vec{a}_k\cdot\vec{a}_{k+1})&=\sum_{k=0}^{11}\left[\cos\frac{k}{6}\pi\cos\frac{k+1}{6}\pi+\left(\sin\frac{k}{6}\pi+\cos\frac{k}{6}\pi\right)\left(\sin\frac{k+1}{6}\pi+\cos\frac{k+1}{6}\pi\right)\right]\\&=\sum_{k=0}^{11}\left(2\cos\frac{k}{6}\pi\cos\frac{k+1}{6}\pi+\sin\frac{k}{6}\pi\sin\frac{k+1}{6}\pi+\sin\frac{2k+1}{6}\pi\right),\end{aligned}$$

考虑到

$$\sum_{k=0}^{11}\left(\cos\frac{k}{6}\pi\cos\frac{k+1}{6}\pi+\sin\frac{k}{6}\pi\sin\frac{k+1}{6}\pi\right)=\sum_{k=0}^{11}\cos\frac{\pi}{6}=6\sqrt{3},$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11}\cos\frac{k}{6}\pi\cos\frac{k+1}{6}\pi&=\sum_{k=0}^{11}\sin\frac{k+3}{6}\pi\sin\frac{k+4}{6}\pi\\&=\sum_{k=3}^{14}\sin\frac{k}{6}\pi\sin\frac{k+1}{6}\pi\\&=\sum_{k=0}^{11}\sin\frac{k}{6}\pi\sin\frac{k+1}{6}\pi,\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=0}^{11}\cos\frac{k}{6}\pi\cos\frac{k+1}{6}\pi=\sum_{k=0}^{11}\sin\frac{k}{6}\pi\sin\frac{k+1}{6}\pi=3\sqrt{3},$$

又

$$\sum_{k=0}^{11}\sin\frac{2k+1}{6}\pi=\sum_{k=0}^{5}\sin\frac{2k+1}{6}\pi+\sum_{k=6}^{11}\sin\frac{2k+1}{6}\pi=0,$$

因此所求和式的值为 $9\sqrt{3}$.

方法二

根据题意有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11}(\vec{a}_k\cdot\vec{a}_{k+1})&=\sum_{k=0}^{11}\left[\cos\frac{k}{6}\pi\cos\frac{k+1}{6}\pi+\left(\sin\frac{k}{6}\pi+\cos\frac{k}{6}\pi\right)\left(\sin\frac{k+1}{6}\pi+\cos\frac{k+1}{6}\pi\right)\right]\\&=\sum_{k=0}^{11}\left[\cos\frac{k}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k}{6}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{k}{6}\pi\right)+\right.\\&\qquad\left.\left(\sin\frac{k}{6}\pi+\cos\frac{k}{6}\pi\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin\frac{k}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cos\frac{k}{6}\pi\right)\right],\end{aligned}$$

[1]两种方法都刻意避开了使用和差化积和积化和差公式

注意到

$$\sum_{k=0}^{11}\cos^2\frac{k}{6}\pi=\sum_{k=0}^{11}\frac{1+\cos\frac{k}{3}\pi}{2}=6,$$
$$\sum_{k=0}^{11}\cos\frac{k}{6}\pi\sin\frac{k}{6}\pi=\sum_{k=0}^{11}\frac{1}{2}\sin\frac{k}{3}\pi=0,$$
$$\sum_{k=0}^{11}\sin^2\frac{k}{6}\pi=\sum_{k=0}^{11}\frac{1-\cos\frac{k}{3}\pi}{2}=6,$$

于是不难计算得所求和式的值为 $9\sqrt{3}$.

解　$9\sqrt{3}$

10.3　反解不等式

第 19 题.　已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b\,(a,b\in\mathbf{R})$.
(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $b=c-a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, 求 c 的值.

分析　第 (1) 小题是利用导函数研究函数的单调性问题, 属于常规问题. 第 (2) 小题是利用导函数研究函数的零点问题, 可以转化为极值问题得到相关的不等式之后, 再利用解不等式的知识, 由 a 的取值范围以及关于 a 的不等式的形式反推该不等式的系数.

解　(1) 根据已知有 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=3x^2+2ax,$$

于是

情形 1　当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
情形 2　当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(-\frac{2a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(0,-\frac{2a}{3}\right)$ 上单调递减;
情形 3　当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{2a}{3}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{2a}{3},0\right)$ 上单调递减.
(2) 函数 $f(x)$ 有三个不同零点等价于 $f(x)$ 的极大值与极小值异号, 即

$$f(0)\cdot f\left(-\frac{2a}{3}\right)<0,$$

也即

$$(c-a)\left(\frac{4}{27}a^3+c-a\right)<0,$$

整理得

$$(a-c)\left(a^3-\frac{27}{4}a+\frac{27}{4}c\right)>0.$$

该不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ ，于是对应的四次不等式为

$$(a+3)(a-1)\left(a-\frac{3}{2}\right)^2>0,$$

对比系数解得 $c=1$ ，因此所求的 c 的值为 1 .

10.4 论函数是怎样炼成的

第 20 题. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是各项为正数且公差为 $d\,(d\neq 0)$ 的等差数列.

(1) 证明: $2^{a_1},2^{a_2},2^{a_3},2^{a_4}$ 依次构成等比数列;

(2) 是否存在 a_1,d ，使得 a_1,a_2^2,a_3^3,a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;

(3) 是否存在 a_1,d 及正整数 n,k ，使得 $a_1^n,a_2^{n+k},a_3^{n+2k},a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列? 并说明理由.

分析 *第 (1) 小题直接利用等比数列的定义即可证明，属于送分题. 第 (2) 小题和第 (3) 小题均可通过提炼通项构造函数，利用导函数研究函数的单调性变化从零点的个数角度完成说理.*

解 (1) 注意到

$$\frac{2^{a_2}}{2^{a_1}}=\frac{2^{a_3}}{2^{a_2}}=\frac{2^{a_4}}{2^{a_3}}=2^d,$$

于是命题得证.

(2) 若 a_1,a_2^2,a_3^3,a_4^4 依次构成等比数列，记 $a_0=a_1-d$ ，那么

$$\ln(a_0+d),2\ln(a_0+2d),3\ln(a_0+3d),4\ln(a_0+4d)$$

构成等差数列，设该等差数列为 $b_0+d_0,b_0+2d_0,b_0+3d_0,b_0+4d_0$ ，则关于 x 的方程

$$x\ln(a_0+dx)=b_0+d_0x$$

至少有 4 个实数根 $x=1,2,3,4$.

设函数 $\varphi(x)=\ln(a_0+dx)-\dfrac{b_0+d_0x}{x}$ ，则其导函数

$$\varphi'(x)=\frac{d}{a_0+dx}+\frac{b_0}{x^2}=\frac{dx^2+b_0dx+a_0b_0}{x^2(a_0+dx)},$$

由于 $\varphi'(x)$ 至多有 2 个零点，因此函数 $\varphi(x)$ 的单调性至多发生 2 次变化，所以不可能有多于 3 个零点 (因为连续函数在两个相邻零点之间都至少发生一次单调性变化)，从而不存在 a_1,d 使得 a_1,a_2^2,a_3^3,a_4^4 依次构成等比数列.

(3) 若 $a_1^n,a_2^{n+k},a_3^{n+2k},a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列，那么

$$n\ln a_1,(n+k)\ln(a_1+d),(n+2k)\ln(a_1+2d),(n+3k)\ln(a_1+3d)$$

构成等差数列，设该等差数列为 $b_1, b_1+d_1, b_1+2d_1, b_1+3d_1$ ，则关于 x 的方程

$$(n+kx)\ln(a_1+dx)=b_1+d_1x$$

至少有 4 个实数根 $x=0,1,2,3$.
设函数 $\mu(x)=\ln(a_1+dx)-\dfrac{b_1+d_1x}{n+kx}$ ，则其导函数

$$\mu'(x)=\frac{d}{a_1+dx}-\frac{nd_1-kb_1}{(n+kx)^2}=\frac{d(n+kx)^2-(nd_1-kb_1)(a_1+dx)}{(a_1+dx)(n+kx)^2},$$

由于 $\mu'(x)$ 至多有 2 个零点，因此函数 $\mu(x)$ 的单调性至多发生 2 次变化，所以不可能有多于 3 个零点(理由同上)，从而不存在 a_1, d 及正整数 n, k ，使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列.

第十一章　山东卷

11.1　函数的迭代

理科第 10 题.　设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1,\\ 2^x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则满足 $f(f(a))=2^{f(a)}$ 的 a 的取值范围是 (　　)

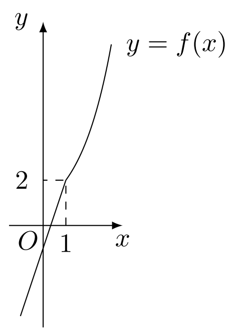
A. $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$　　B. $[0,1]$　　C. $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　D. $[1,+\infty)$

分析 令 $b=f(a)$，则由于 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，因此 b 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

此时 $f(b)=2^b$，也就是 b 为函数 $f(x)$ 与 $y=2^x$ 的公共点的横坐标，不难得知 b 的范围是 $[1,+\infty)$. 因此 a 的取值范围由不等式

$$f(a)\geqslant 1$$

确定，结合 $f(x)$ 是单调递增函数 (如图)，可得 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.



解　C

文科第 10 题.　设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-b, & x<1,\\ 2^x, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 若 $f\left(f\left(\dfrac{5}{6}\right)\right)=4$，则 $b=$ (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{7}{8}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

分析 按部就班的求解即可:

$$f\left(f\left(\frac{5}{6}\right)\right)=4\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(\dfrac{5}{6}\right)<1,\\3f\left(\dfrac{5}{6}\right)-b=4,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f\left(\dfrac{5}{6}\right)\geqslant 1,\\2^{f\left(\frac{5}{6}\right)}=4.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\cdot\dfrac{5}{6}-b<1,\\3\left(3\cdot\dfrac{5}{6}-b\right)-b=4,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}3\cdot\dfrac{5}{6}-b\geqslant 1,\\2^{3\cdot\frac{5}{6}-b}=4.\end{cases}$$

解得 $b=\dfrac{1}{2}$.

解　D

11.2　垂心与焦点

理科第 15 题.　平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的渐近线与抛物线 $C_2:x^2=2py\,(p>0)$ 交于 O,A,B . 若 $\triangle OAB$ 的垂心为 C_2 的焦点，则 C_1 的离心率为________.

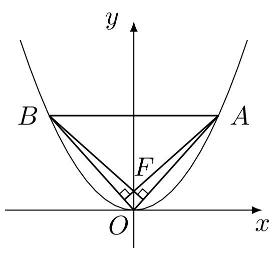
分析 设 $A(2pt,2pt^2)$ ， $B(-2pt,2pt^2)$ ，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ ，即

$$\left(-2pt,\frac{p}{2}-2pt^2\right)\cdot\left(-2pt,2pt^2\right)=0,$$

解得 $t^2=\dfrac{5}{4}$. 因此

$$\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{2pt^2}{2pt}\right)^2=\frac{5}{4},$$

从而 $e=\dfrac{3}{2}$.



解　$\dfrac{3}{2}$

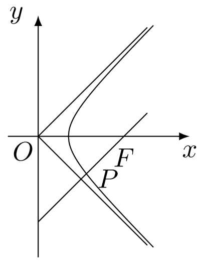
11.3　平移渐近线

文科第 15 题.　过双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右焦点作一条与其渐近线平行的直线，交 C 于点 P . 若点 P 的横坐标为 $2a$ ，则 C 的离心率为________.

分析 如图，由 P 点横坐标为 $2a$ 可得 $P(2a,-\sqrt{3}b)$ ，于是直线 PF 的斜率为

$$\frac{\sqrt{3}b}{c-2a}=\frac{b}{a},$$

从而 $e=\dfrac{c}{a}=2+\sqrt{3}$.



解　$2+\sqrt{3}$

11.4　椭圆变成圆

理科第 20 题/文科第 21 题.　平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，左、右焦点分别是 F_1 、 F_2 . 以 F_1 为圆心、以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心、以 1 为半径的圆相交，且交点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程[1]；

(2) 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$ ， P 为椭圆 C 上任意一点，过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A、B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q .

(i) 求 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}$ 的值；

(ii) $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

分析 第 *(1)* 小题是考查椭圆的定义与方程的常规问题. 第 *(2)* 小题中，注意到椭圆 E 与椭圆 C 的相似比是 $2:1$ ，于是 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}=2$ ，这也是第 *(i)* 小问所指明的事实. 第 *(ii)* 小问可以利用第 *(i)* 小问所给出的提示将 $\triangle ABQ$ 面积的最大值问题转化为求 $\triangle ABO$ 面积的最大值问题，而后者可以利用伸缩变换[2]轻松解决.

解　(1) 由椭圆的定义可得 $2a=4$ ，进而可以求得椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

(2)(i) 由 (1) 的结论，可得椭圆 $E:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

设 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$ ($\lambda<0$)， $P(x_0,y_0)$ ，则 $Q(\lambda x_0,\lambda y_0)$.

由于 P,Q 两点分别在椭圆 C,E 上，因此

$$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1,\frac{(\lambda x_0)^2}{16}+\frac{(\lambda y_0)^2}{4}=1,$$

两式相除，解得 $\lambda=-2$ ，因此

$$\frac{|OQ|}{|OP|}=|\lambda|=2.$$

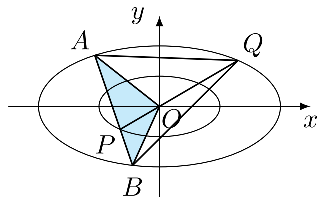
[1]文科第 21 题降低了此小题的难度

[2]详见附录『仿射变换』

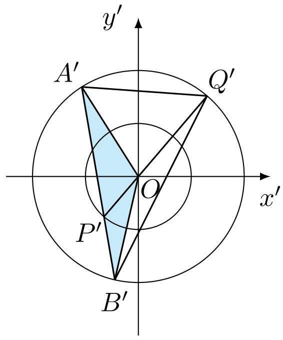
(ii) 注意到在运动过程中， QO 与 OP 的比始终不变 (第 (i) 小问中的结论)，于是可以得到

$$S_{\triangle ABQ}=3S_{\triangle ABO},$$

这样原来的动点 Q 就转化成了现在的定点 O ，如图.



作保持横坐标不变, 纵坐标变为原来的 2 倍的伸缩变换 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=2y,\end{cases}$ 则椭圆 E 变为圆 $E':x'^2+y'^2=16$ ，椭圆 C 变为圆 $C':x'^2+y'^2=4$ ，与此同时，三角形 $A'B'O$ 的面积为三角形 ABO 面积的 2 倍，如图.



设原点 O 到弦 $A'B'$ 的距离为 d ，则由弦 $A'B'$ 与圆 C' 有公共点可得 d 的取值范围是 $(0,2]$ ，于是在圆 E' 中应用垂径定理求弦长

$$|A'B'|=2\sqrt{4^2-d^2},$$

进而

$$S_{\triangle A'B'O}=\frac{1}{2}\cdot|A'B'|\cdot d=\sqrt{d^2(16-d^2)},$$

结合 d 的取值范围可得 $S_{\triangle A'B'O}$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$ ，进而可得 $S_{\triangle ABO}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$ ，于是 $S_{\triangle ABQ}$ 的最大值为 $6\sqrt{3}$.

11.5 最小值的最大值

文科第 20 题. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln x$ ， $g(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x-y=0$ 平行.

(1) 求 a 的值;

(2) 是否存在自然数 k ，使得方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(k,k+1)$ 内存在唯一的根? 如果存在，求出 k ；如果不存在，请说明理由;

(3) 设函数 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ($\min\{p,q\}$ 表示 p,q 中的较小值)，求 $m(x)$ 的最大值.

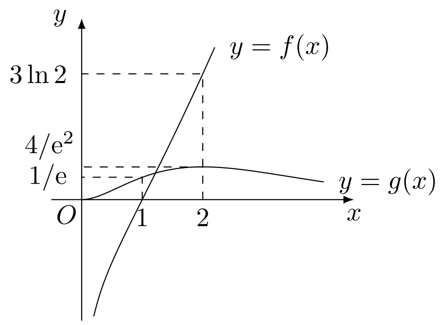
分析 第 *(1)* 小题考查利用导函数求函数的切线方程，属于常规问题．注意到第 *(3)* 小题的设问方式，因此分别分析函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的性质并画出它们在同一坐标系下的草图就可以解决第 *(2)* 小题，并为解决第 *(3)* 小题打下良好的基础．当第 *(2)* 小题顺利解决后，依托得到的草图，很容易解决第 *(3)* 小题．

解　(1) 根据题意，$f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=\ln x+\frac{a}{x}+1,$$
而 $f'(1)=2$，因此解得 $a=1$．

(2) 由 (1) 知，$f(x)=(x+1)\ln x$，$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1$，因此 $f'(x)$ 的导函数
$$f''(x)=\frac{x-1}{x^2},$$
于是 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=1$ 处取得最小值为 $f'(1)=2$，因此 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数．

对于函数 $g(x)$，其导函数
$$g'(x)=\frac{x(2-x)}{\mathrm{e}^{-x}},$$
因此函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $x=2$ 处取得极大值为 $g(2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$．

结合 $f(1)=0$，$f(2)=3\ln 2$，$g(0)=0$，$g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，可以画出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的草图，如图．



在区间 $(1,2)$ 上，令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，而 $h(2)=3\ln 2-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}>0$，因此函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上存在零点．

由于当 $x>0$ 时，$\ln x+\dfrac{1}{x}+1\geqslant 2$，于是在区间 $(0,2]$ 上，因此 $h(x)$ 的导函数
$$h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1-\frac{x(2-x)}{\mathrm{e}^x}\geqslant 2-x(2-x)=1+(x-1)^2>0,$$
而在区间 $(2,+\infty)$，有
$$h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1-\frac{x(2-x)}{\mathrm{e}^x}>2>0,$$
于是 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因此 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上的零点是唯一的．这样就证明了存在自然数 $k=1$，使得方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(k,k+1)$ 内存在唯一的根．

(3) 设 (2) 中 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上的零点为 t，则由于 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因此

$$m(x)=\begin{cases}f(x),0<x<t,\\ g(x),x\geqslant t,\end{cases}$$

从而可得 $m(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $x=2$ 处取得最大值 $m(2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

11.6 分析端点

理科第 21 题. 设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a\left(x^2-x\right)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.
(1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数，并说明理由；
(2) 若 $\forall x>0$， $f(x)\geqslant 0$ 成立，求 a 的取值范围.

分析 第 (1) 小题是利用导函数研究函数的极值点的问题，本质上是考查含参二次函数在限制区间上的零点分布问题，确定讨论的分界点后展开讨论即可. 第 (2) 小题可以先通过分析端点处的函数值以及进一步的导函数值得到讨论的分界点，然后展开对单调性的讨论. 事实上，$f(0)=0$，而 $f'(0)=-a+1$，因此有分界点 1；考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 可得 a 的另一个分界点 0 .

解 (1) 根据题意，$f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\cdot\left(2ax^2+ax-a+1\right),$$

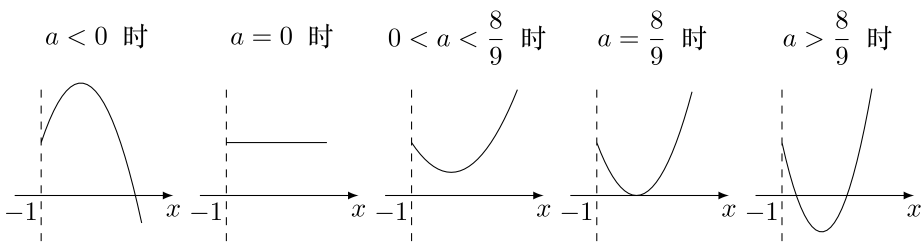
记其中决定 $f'(x)$ 符号的部分为

$$h(x)=2ax^2+ax-a+1.$$

考虑到二次项系数为 $2a$，于是 $a=0$ 是一个讨论点；而对称轴为 $x=-\dfrac{1}{4}$，因此需要考虑判别式

$$\Delta=a^2-4\cdot 2a\cdot(-a+1)=a(9a-8),$$

因此 $a=\dfrac{8}{9}$ 也是一个讨论点. 于是可以根据这些讨论点进行讨论[1]，$h(x)$ 在每个讨论区间上的图象如图所示.



于是不难得到：
当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 极值点个数为 1，为极大值点；
当 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{8}{9}$ 时，函数 $f(x)$ 极值点个数为 0；

[1]也可以分离变量，考虑关于 x 的方程 $-\dfrac{1}{a}=(2x-1)(x+1)$ 的实根个数

当 $a > \dfrac{8}{9}$ 时，函数的极值点个数为 2，其中有一个极大值点和一个极小值点.

(2) 按 a 和 $0, 1$ 的大小关系展开讨论，讨论中默认 $x > 0$.

第一种情形，$a < 0$ 时.

令 $g(x) = \ln(x+1) - x$，则 $g(x)$ 的导函数 $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 < 0$，因此 $g(x)$ 单调递减，于是 $g(x) < g(0) = 0$.

因此 $f(x) < x + a(x^2 - x) = x(ax + 1 - a)$，取 $x = \dfrac{1-a}{-a}$，则 $f(x) < 0$，不符合题意.

第二种情形，$0 \leqslant a \leqslant 1$ 时.

此时 $f'(x) > 0$，因此 $f(x)$ 单调递增，于是 $f(x) > f(0) = 0$，符合题意.

第三种情形，$a > 1$ 时.

此时在区间 $\left(0, \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 8a(a-1)}}{4a}\right)$ 上有 $f'(x) < 0$，因此在该区间内 $f(x)$ 单调递减，此时 $f(x) < f(0) = 0$，不符合题意.

综上，a 的取值范围是 $[0, 1]$.

第十二章　陕西卷

12.1　最佳拍档

理科第 12 题．　对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（a 为非零整数)，四位同学分别给出下列结论，其中有且只有一个结论是错误的，则错误的结论是（　　）

A. -1 是 $f(x)$ 的零点　　B. 1 是 $f(x)$ 的极值点

C. 3 是 $f(x)$ 的极值　　D. 点 $(2,8)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上

分析 由于选项 B，C 都在描述二次函数顶点，于是优先将它们放在一起考虑．

情形一　选项 B、C 同时正确

此时可以由二次函数的顶点式设其解析式为 $f(x)=a(x-1)^2+3$，若选项 A 正确，则 $a=-\dfrac{3}{4}$，与 a 是非零整数的条件不符；若选项 D 正确，则 $a=5$，符合 a 为非零整数的条件．

情形二　选项 A、D 同时正确

此时应该从二次函数的零点出发考虑．

① 选项 C 显然不正确，因为 $f(-1)<3<f(2)$，于是 3 一定不是二次函数 $f(x)$ 的极值；

② 若选项 B 正确，则另一个零点为 3，此时可由二次函数的两根式设其解析式为 $f(x)=a(x+1)(x-3)$，结合选项 D 正确可得 $a=-\dfrac{8}{3}$，与 a 是非零整数的条件不符．

因此错误的结论是 A．

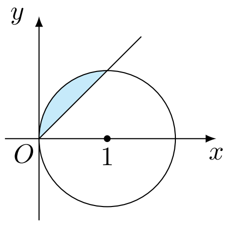
解　A

12.2　复数与概率

文科第 12 题．　设复数 $z=(x-1)+y\mathrm{i}\,(x,y\in\mathbf{R})$，若 $|z|\leqslant 1$，则 $y\geqslant x$ 的概率为（　　）

A. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}$　　B. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$　　C. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\pi}$　　D. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$

分析 根据题意，样本空间为圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的内部（包含边界）；事件空间为样本空间中在直线 $y=x$ 左上方（包含直线上）的部分，如图．



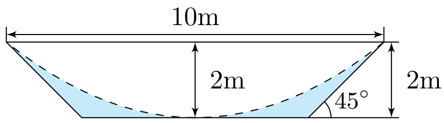
因此所求的概率为

$$\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}{\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}.$$

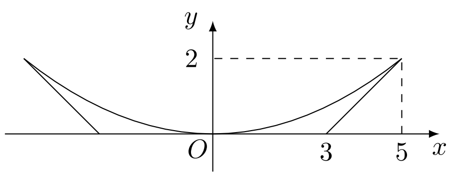
解　C

12.3　折戟沉沙

理科第 16 题.　如图，一横截面为等腰梯形的水渠，因泥沙沉积，导致水渠截面边界呈抛物线型 (图中虚线所示)，则原始的最大流量与当前最大流量的比值为________.



分析　如图建系，则易得抛物线的解析式为 $y=\dfrac{2}{25}x^2$.



根据题意，原始水渠截面面积为

$$\frac{6+10}{2}\cdot 2=16,$$

而当前水渠截面面积为

$$2\cdot\int_0^5\left(2-\frac{2}{25}x^2\right)\mathrm{d}x=2\cdot\left(2x-\frac{2}{75}x^3\right)\bigg|_0^5=\frac{40}{3},$$

因此所求的比值为 $16\div\dfrac{40}{3}=1.2$.

解　1.2

12.4　恒等式的发现

文科第 16 题．　观察下列等式：

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6},$$
$$\cdots,$$

据此规律，第 n 个等式可为________．

分析　*容易归纳出第 n 个等式为*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

一个简单的证明为

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

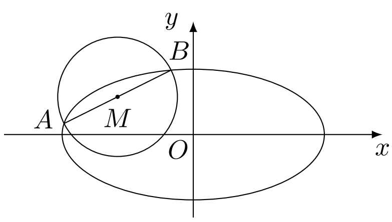
解　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

12.5　椭圆的中点弦

理科第 20 题．　已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的半焦距为 c，原点 O 到经过两点 $(c,0)$，$(0,b)$ 的直线的距离为 $\frac{1}{2}c$．

(1) 求椭圆 E 的离心率；

(2) 如图，AB 是圆 $M:(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$ 的一条直径，若椭圆 E 经过 A,B 两点，求椭圆 E 的方程．



分析　*第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，解一个直角三角形即得．第 (2) 小题中出现了弦的中点，可以利用点差法进行求解．*

解 (1) 根据题意，以原点 O ，点 $(c,0)$ ，点 $(0,b)$ 为顶点的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{1}{2}c,$$

化简得 $b=\dfrac{a}{2}$ ，进而可得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 根据 (1) 中的结论，可设椭圆方程为 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=b^2$ ，设 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，则

$$\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=b^2,\frac{x_2^2}{4}+y_2^2=b^2,$$

两式相减可得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0.$$

因为线段 AB 的中点为 $M(-2,1)$ ，因此

$$x_1+x_2=-4,y_1+y_2=2,$$

代入上式，可得

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2},$$

设直线 AB 的倾斜角为 θ ，则有

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

设圆 M 的半径为 r ，则 A,B 点的坐标为

$$(-2\pm r\cos\theta,1\pm r\sin\theta),\text{ 即 }\left(-2\pm\sqrt{2},1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

因此

$$\frac{(-2\pm\sqrt{2})^2}{4}+\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=b^2,$$

化简得 $b^2=3$ ，从而椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

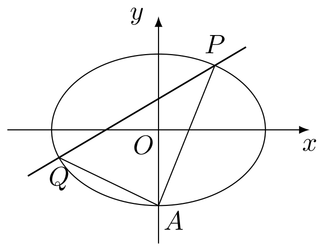
拓展 在此题中， $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ ，这一结论对中心为 O 的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的任意弦 AB 与中点 M 均成立[1].

12.6 化齐次联立

文科第 **20** 题. 如图，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 经过点 $A(0,-1)$ ，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

---

[1] 详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』



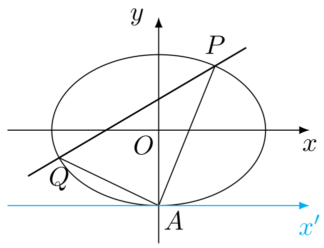
(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 经过点 $(1,1)$，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P,Q (均异于点 A)，证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2 .

分析 *第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题．第 (2) 小题考查直线与椭圆的位置关系，利用化齐次联立处理过定点的两条直线的斜率之和 (积) 的问题会非常简便.*

解　(1) 根据题意，有 $b=1$ ，而 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，于是 $a=\sqrt{2}$ ，因此椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2) 如图，以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系 $x'Oy'$ (y' 轴与 y 轴重合)，则点 $(1,1)$ 在 $x'Oy'$ 坐标系下为 $(1,2)$ ，设此时直线 PQ 方程为 $mx'+ny'=1$ ，则有 $m+2n=1$.



在坐标系 $x'Oy'$ 下，椭圆方程变为

$$\frac{x'^2}{2}+(y'-1)^2=1,\ 即\ \frac{1}{2}x'^2+y'^2-2y'=0,$$

与直线 PQ 的方程化齐次联立可得

$$\frac{1}{2}x'^2+y'^2-2y'(mx'+ny')=0,\ 即\ (1-2n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-2m\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)+\frac{1}{2}=0,$$

因此直线 AP 与直线 AQ 的斜率之和 (此值与坐标系无关) 为

$$-\frac{-2m}{1-2n}=2,$$

所以原命题得证.

12.7　一分高下

理科第 21 题.　设 $f_n(x)$ 是等比数列 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 的各项和，其中 $x>0$ ，$n\in\mathbf{N}$ ，$n\geqslant 2$.

(1) 证明：函数 $F_n(x)=f_n(x)-2$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点 (记为 x_n)，且 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_n^{n+1}$;

(2) 设有一个与上述等比数列的首项、末项、项数分别相同的等差数列，其各项和为 $g_n(x)$ ，比较 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 的大小，并加以证明.

分析 第 *(1)* 小题是利用导函数研究函数的零点问题，只需要分析端点后利用零点的存在性定理证明零点存在，再利用函数在区间上的单调性证明零点唯一即可．第 *(2)* 小题只需要作差比较即可．如果恰当的利用题中的和式，而不盲目求和可以有效的降低运算量．

解 (1) 根据已知，有 $F_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$，于是

$$F_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1=-\frac{1}{2^n}<0,$$

而 $F_n(1)=n-1>0$，所以 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有零点．
另一方面，考虑到在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上

$$F_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0,$$

因此函数 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增．
综上所述，函数 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点．
由 $x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n-1=0$，其中 $\frac{1}{2}<x_n<1$，可得

$$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}-1=0,$$

整理即得 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_n^{n+1}$．
(2) 当 $x=1$ 时 $f_n(x)=g_n(x)$；当 $x\neq 1$ 时 $f_n(x)<g_n(x)$，证明如下．
根据题意描述，$n\geqslant 2$．
当 $x\neq 1$ 时，考虑

$$\begin{aligned}
h_n(x)&=f_n(x)-g_n(x)\\
&=1+x+x^2+\cdots+x^n-\frac{n+1}{2}(1+x^n)\\
&=\frac{1}{2}\left[(1+x^n)+(x+x^{n-1})+\cdots+(x^n+1)-(n+1)\cdot(1+x^n)\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[x^k+x^{n-k}-(1+x^n)\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[(x^k-1)(1-x^{n-k})\right]\\
&<0,
\end{aligned}$$

因此命题得证．

拓展 第 (2) 小题的几何意义为指数函数图象的割线形成的弦恒在指数函数图象的上方．因此也可以证明当 $x\neq 1$ 时，不等式

$$x^k<1+k\cdot\frac{x^n-1}{n}$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 成立即可．此题与 2012 年高考重庆理科数学第 21 题（压轴题）基本一致，试题如下：

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}=a_2S_n+a_1$，其中 $a_2\neq 0$.

(1) 求证：$\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列；

(2) 若 $a_2>-1$，求证 $S_n\leqslant\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$，并给出等号成立的充要条件.

12.8　数列的界估计

文科第 **21** 题.　设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$，$x\geqslant 0$，$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$.

(1) 求 $f_n'(2)$；

(2) 证明：$f_n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 内有且仅有一个零点 (记为 a_n)，且 $0<a_n-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

分析　*第 (1) 小题考查函数的求导运算，可以先求和再求导也可以先求导再求和. 第 (2) 小题是利用导函数研究函数的零点问题，只要分析端点后利用零点的存在性定理证明零点存在，再利用函数在区间上的单调性证明零点唯一即可. 如果恰当的利用题中的和式，而不盲目求和可以有效的降低运算量. 第 (2) 小题中关于零点 a_n 的不等式给出了在原有上下界 $\dfrac{2}{3}$ 和 0 的基础上进一步的上下界估计，可以通过分析通项进行.*

解　(1) 根据题意，有

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}-1, & x\neq 1,\\ n-1, & x=1.\end{cases}$$

因此当 $x>1$ 时，$f_n(x)$ 的导函数

$$f_n'(x)=\frac{[(x-1)\cdot n-1]\cdot x^n+1}{(x-1)^2},$$

进而可得 $f_n'(2)=(n-1)\cdot 2^n+1$.

(2) 根据 (1) 中的结果，有 $f_n(0)=-1<0$，且当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\dfrac{2}{3}\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{2}{3}}-1=1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n>0,$$

从而 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 上有零点.

另一方面，在区间 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 上，$f_n(x)$ 的导函数

$$f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0,$$

于是 $f_n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 上单调递增，因此在区间 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 上的零点唯一.

注意到

$$\frac{a_n-a_n^{n+1}}{1-a_n}-1=0,$$

于是

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot a_n^{n+1}.$$

由于 $0 < a_n < \dfrac{2}{3}$，因此

$$0 < a_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

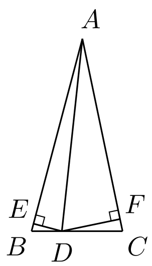
整理即得欲证不等式成立.

第十三章　上海卷

13.1　身份识别

理科第 14 题.　在锐角三角形 ABC 中，$\tan A=\dfrac{1}{2}$，D 为边 BC 上的点，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积分别为 2 和 4．过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$________.

分析 画出示意图如图.



注意到 $\overrightarrow{DE}$ 和 $\overrightarrow{DF}$ 的夹角为 $\pi-A$，因此问题的关键在于求 $DE\cdot DF$，而 DE、DF 的“身份”分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的高，因此有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}&=DE\cdot DF\cdot\cos(\pi-A)\\&=\frac{2S_{\triangle ABD}}{AB}\cdot\frac{2S_{\triangle ADC}}{AC}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\\&=-\frac{64}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{AB\cdot AC}\\&=-\frac{64}{\sqrt{5}}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{6\cdot AB\cdot AC}\\&=-\frac{64}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin A}{6}\\&=-\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

解　$-\dfrac{16}{15}$

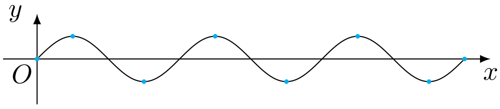
13.2　位差和

文科第 14 题.　已知函数 $f(x)=\sin x$．若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 满足 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant 6\pi$，且 $|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|=12$（$m\geqslant 2$，$m\in\mathbf{N}^*$），则 m 的最小值为________.

分析 从直观上看，由于当自变量 x 从 0 变化到 6π 时，函数值 y 的总的改变量 (也即变化过程中自变量对应的函数图象上的点在 y 轴上的投影运动的路程) 恰好为 12，因此区间的端点以及每一个极值点都应该被选取．否则，根据绝对值不等式，有函数值的位差和

$$\sum_{i=1}^{m-1}|f(x_i)-f(x_{i+1})|<12.$$

这样就有 $m\geqslant 8$．



另一方面，取序列

$$0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2},6\pi$$

就得到 $m=8$ 的情形．

综上所述，m 的最小值为 8．

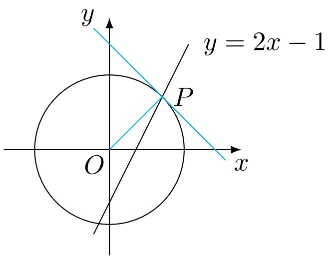
解　8

13.3　割线的极限

理科第 18 题/文科第 18 题．　设 $P_n(x_n,y_n)$ 是直线 $2x-y=\dfrac{n}{n+1}\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 在第一象限的交点，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-1}{x_n-1}=(\quad)$

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

分析 如图，$n\to\infty$ 时，点 $P_n(x_n,y_n)$ 从圆上无限接近 $P(1,1)$，因此所求极限即圆 $x^2+y^2=2$ 在点 P 处切线的斜率，为 -1．



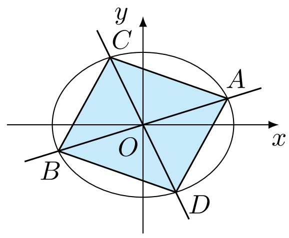
解　A

13.4　暗伏的正方形

理科第 21 题．　已知椭圆 $x^2+2y^2=1$，过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A,B 和 C,D．记得到的平行四边形 $ACBD$ 的面积为 S．

(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$．用 A,C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离，并证明 $S=2|x_1y_2-x_2y_1|$；

(2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$，求面积 S 的值．



分析　第 (1) 小题考查平面解析几何的一些基本公式. 第 (2) 小题中给出的直线 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$ 在仿射变换[1] $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\sqrt{2}y \end{cases}$ 下即直线 l_1' 与 l_2' 的斜率之积为 -1，因此仿射变换后平行四边形 $ACBD$ 变为正方形，再由仿射变换前后平面图形的面积关系易得结果.

解　(1) 直线 l_1 的方程为 $y_1x-x_1y=0$，因此点 C 到直线 l_1 的距离

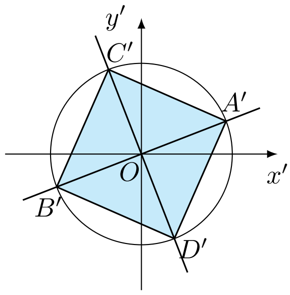
$$d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},$$

进而

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2d\cdot 2|OA|=2\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2|x_1y_2-x_2y_1|.$$

因此原命题得证.

(2) 在仿射变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\sqrt{2}y \end{cases}$ 下，椭圆 $x^2+2y^2=1$ 变为圆 $x'^2+y'^2=1$，如图.



因为直线 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$，所以仿射变换后直线 l_1' 与 l_2' 的斜率之积为 -1. 这样就得到四边形 $A'C'B'D'$ 是对角线长为 2 的正方形，其面积 $S'=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$，因此 $S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}S'=\sqrt{2}$.

文科第 **22** 题.　已知椭圆 $x^2+2y^2=1$，过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A,B 和 C,D. 记 $\triangle AOC$ 的面积为 S.

(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，用 A,C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离，并证明 $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$；

(2) 设 $l_1: y=kx$，$C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$S=\dfrac{1}{3}$，求 k 的值；

(3) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 m，求 m 的值，使得无论 l_1 与 l_2 如何变动，面积 S 保持不变.

分析　思路与理科第 21 题基本相同，增设的中间小题是第 (1) 小题结论的应用.

[1] 详见附录『仿射变换』

解 (1) 直线 l_1 的方程为 $y_1x-x_1y=0$，因此点 C 到直线 l_1 的距离

$$d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},$$

进而

$$S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|OA|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

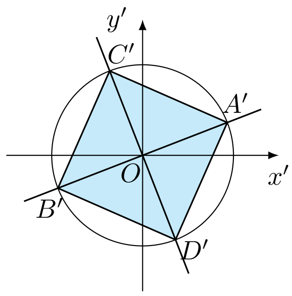
因此原命题得证.

(2) 联立直线 l_1 的方程与椭圆方程，得 $x_1^2=\dfrac{1}{1+2k^2}$. 因此由第 (1) 小题的结果可得

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot kx_1\right|=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{\frac{(k-1)^2}{2k^2+1}},$$

又根据题意 $S=\dfrac{1}{3}$，从而解得 $k=-1$ 或 $k=-\dfrac{1}{5}$.

(3) 在仿射变换 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=\sqrt{2}y\end{cases}$ 下，椭圆 $x^2+2y^2=1$ 变为圆 $x'^2+y'^2=1$，如图.



直线 l_1 与 l_2 仿射变换后的直线 l_1' 与 l_2' 的斜率之积为 $2m$，同时 $\triangle AOC$ 仿射变换后成为 $\triangle A'OC'$，其面积 $S'=\sqrt{2}S$ 保持不变.

由于 $\triangle A'OC'$ 是腰长为 1 的等腰三角形，于是其面积

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\sin\angle A'OC'\cdot|OA'|^2=\frac{1}{2}\cdot\sin\angle A'OC',$$

因此 $\angle A'OC'$ 保持不变.

当 $2m=-1$ 即 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\angle A'OC'$ 恒为直角，保持不变，符合题意；

当 $2m\neq-1$ 时，显然 $m\neq0$(否则必然有一条直线为 x 轴，显然不符合题意). 设直线 l_1' 与 l_2' 的斜率分别为 $k,\dfrac{2m}{k}$，则

$$|\tan\angle A'OC'|=\left|\frac{k-\dfrac{2m}{k}}{1+k\cdot\dfrac{2m}{k}}\right|=\left|\frac{k-\dfrac{2m}{k}}{1+2m}\right|$$

不为定值，不符合题意.

综上所述，m 的值为 $-\dfrac{1}{2}$ 时，无论 l_1 和 l_2 如何变动，面积 S 保持不变.

13.5　配钥匙

理科第 23 题．　对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$，若存在正常数 T，使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数，则称 $g(x)$ 为余弦周期函数，且称 T 为其余弦周期．已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数，其值域为 $\mathbf{R}$．设 $f(x)$ 单调递增，$f(0)=0$，$f(T)=4\pi$．

(1) 验证 $h(x)=x+\sin\dfrac{x}{3}$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数；

(2) 设 $a<b$，证明：对任意 $c\in[f(a),f(b)]$，存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=c$；

(3) 证明："u_0 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解"的充要条件是"u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解"，并证明对任意 $x\in[0,T]$ 都有 $f(x+T)=f(x)+f(T)$．

分析　*第 (1) 小题考查对新定义的理解．第 (2) 小题考查对函数的值域与单调性的理解．第 (3) 小题考查充分必要条件的概念以及推理论证能力，其中利用提示以及复合函数的单调性划分区间是证明结论的关键，之后分段证明即可 (类似于配钥匙的过程)．*

解　(1) 函数 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，而

$$\begin{aligned}\cos h(x+6\pi)&=\cos\left[(x+6\pi)+\sin\frac{x+6\pi}{3}\right]\\&=\cos\left[x+\sin\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)\right]\\&=\cos\left(x+\sin\frac{x}{3}\right)\\&=\cos h(x),\end{aligned}$$

从而根据余弦周期函数的定义，$h(x)$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数．

(2) 由函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 知，对任意 $c\in[f(a),f(b)]$，存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=c\in[f(a),f(b)]$，由 $f(x)$ 单调递增知，$x_0\in[a,b]$，因此原命题得证．

(3) 若 u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解，则根据余弦周期函数的定义，有

$$\cos f(u_0)=\cos f(u_0+T)=1,$$

且 $u_0\in[0,T]$，于是充分性得证．

反之，若 u_0 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解，则根据余弦周期函数的定义，有

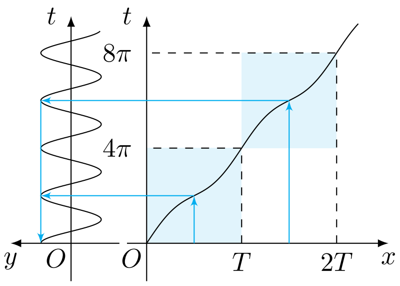
$$\cos f(u_0+T)=\cos f(u_0)=1,$$

且 $u_0+T\in[T,2T]$，于是必要性得证．

综上所述，"u_0 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[0,T]$ 上的解"的充要条件是"u_0+T 为方程 $\cos f(x)=1$ 在 $[T,2T]$ 上的解"，如图．

接下来证明 $\forall x\in[0,T],f(x+T)=f(x)+f(T)$．

函数 $y=\cos f(x)$ 可以看作是函数 $y=\cos t$ 和函数 $t=f(x)$ 的复合函数，如图．



根据第 (2) 小题的结论，存在 x_1,x_2,x_3 满足 $0<x_1<x_2<x_3<T$ ，使得 $f(x_k)=k\pi$ ，其中 $k=1,2,3$ ．为方便叙述，记 $x_0=0$ ， $x_4=T$ ．

当 $x\in[x_0,x_1]$ 时，函数 $y=\cos f(x)$ 是单调递减函数，因此每一个自变量的值 x 都唯一对应一个函数值 $\cos f(x)$ ．此时 $x+T\in[x_0+T,x_1+T]$ ，且根据余弦周期函数的定义，有

$$\cos f(x+T)=\cos f(x).$$

特别地，有 $f(x_0+T)=f(T)=4\pi$ ，且 $\cos f(x_1+T)=\cos f(x_1)=-1$ ．

下面证明函数 $y=\cos f(x)$ 在区间 $[x_0+T,x_1+T]$ 上单调递减：

任取 $\alpha,\beta\in[x_0+T,x_1+T],\alpha<\beta$ ，有 $x_0\leqslant\alpha-T<\beta-T\leqslant x_1$ ，由函数 $y=\cos f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上单调递减知 $\cos f(\alpha-T)>\cos f(\beta-T)$ ，即 $\cos f(\alpha)>\cos f(\beta)$ ，从而得到函数 $y=\cos f(x)$ 在区间 $[x_0+T,x_1+T]$ 上单调递减．

综合以上两点，结合余弦函数的单调性，我们有 $f(x_1+T)=5\pi$ ，且对任意 $x\in[x_0,x_1]$ ，均有 $f(x+T)=f(x)+4\pi$ ，命题成立．

类似地，可以证明当 x 在区间 $[x_1,x_2],[x_2,x_3],[x_3,x_4]$ 上时命题均成立，因此原命题得证[1]．

13.6 相关数列

文科第 23 题． 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$ ， $n\in\mathbf{N}^*$ ．

(1) 若 $b_n=3n+5$ ，且 $a_1=1$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项，即 $a_{n_0}\geqslant a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：$\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项；

(3) 设 $a_1=3\lambda<0$ ， $b_n=\lambda^n\,(n\in\mathbf{N}^*)$，求 λ 的取值范围，使得对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$ ， $a_n\neq0$ ，且 $\dfrac{a_m}{a_n}\in\left(\dfrac{1}{6},6\right)$ ．

分析 第 (1) 小题考查等差数列的通项公式．第 (2) 小题需要发现数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 在变化中的不变量，从而找到最大项的对应关系．第 (3) 小题先求出数列 $\{a_n\}$ 的通项，然后按奇偶项分为两个子列分别研究单调性得到数列的最值，最后求解不等式即可．

解 (1) 根据题意，有

$$a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)=6,n\in\mathbf{N}^*,$$

从而 $\{a_n\}$ 是首项为 1 ，公差为 6 的等差数列，其通项公式为 $a_n=6n-5$ ， $n\in\mathbf{N}^*$ ．

[1] 一个典型的错解是：由 $\cos f(x)=\cos f(x+T)$ 得到 $f(x+T)=\pm f(x)+2k\pi$ ，其中 $k\in\mathbf{Z}$ ．取 $x=0$ ，则可得 $k=2$ ，也即 $f(x+T)=\pm f(x)+4\pi$ ．再由函数 $f(x)$ 单调递增舍去 $f(x+T)=-f(x)+4\pi$ ．错误的原因在于 k 并不一定是常数，可以根据 x 的变化而变化．

(2) 根据题意，有

$$a_{n+1}-2b_{n+1}=a_n-2b_n,$$

因此数列 $\{a_n-2b_n\}$ 为常数列，于是

$$a_n-2b_n=a_1-2b_1, n\in\mathbf{N}^*.$$

这样就有 $b_{n_0}=\dfrac{a_{n_0}-(a_1-2b_1)}{2}$ ，从而

$$\forall n\in\mathbf{N}^*, b_{n_0}\geqslant\frac{a_n-(a_1-2b_1)}{2}=b_n,$$

因此 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项.

(3) 根据题意，用累加法可得

$$a_n-a_1=2(b_n-b_1),$$

从而 $a_n=2\lambda^n+\lambda\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$.

由于 $a_1=3\lambda<0$ ，因此 $a_2=2\lambda^2+\lambda<0$ ，从而 $-\dfrac{1}{2}<\lambda<0$.

当 $-\dfrac{1}{2}<\lambda<0$ 时，$a_n=\lambda\cdot\left(2\lambda^{n-1}+1\right)<0$ ，且数列 $\{a_{2n}\}$ 单调递减，数列 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增，因此

$$a_1\leqslant a_{2n-1}<\lambda<a_{2n}\leqslant a_2, n\in\mathbf{N}^*.$$

这样 $\dfrac{a_m}{a_n}\,(\,m,n\in\mathbf{N}^*\,)$ 的最大值为 $\dfrac{a_1}{a_2}$.

根据题意，有且只需 $\dfrac{a_1}{a_2}<6$ ，即

$$\frac{3}{2\lambda+1}<6,\ \text{解得}\ \lambda>-\frac{1}{4}.$$

综上所述，λ 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$.

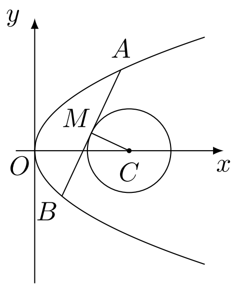
第十四章　四川卷

14.1　抛物线的点差法

理科第 10 题/文科第 10 题.　设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2\,(r>0)$ 相切于点 M，且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条，则 r 的取值范围是 (　)

A. $(1,3)$　　B. $(1,4)$　　C. $(2,3)$　　D. $(2,4)$

分析 如图，记圆心为 $C(5,0)$，设 $A\left(4a^2,4a\right)$，$B\left(4b^2,4b\right)$.



显然当 $r<5$ 时，都存在 $a+b=0$ 的两个平凡解 (垂直于 x 轴的两条切线)，因此只需要考虑 $a+b\neq 0$ 的情形.

由于 $M\left(2\left(a^2+b^2\right),2(a+b)\right)$，于是根据 AB 与圆 C 相切于 M，可得

$$\frac{2(a+b)-0}{2\left(a^2+b^2\right)-5}\cdot\frac{4a-4b}{4a^2-4b^2}=-1,$$

即 $a^2+b^2=\frac{3}{2}$[1]. 于是

$$r^2=CM^2=\left[2\left(a^2+b^2\right)-5\right]^2+\left[2(a+b)-0\right]^2=4+4(a+b)^2,$$

由

$$0<(a+b)^2<2\left(a^2+b^2\right)=3,$$

得 $4<r^2<16$，即 $2<r<4$.

[1]这样就得到了 M 的横坐标为 3，接下来亦可借助几何直观思考

另一方面，对 $(2,4)$ 内的任意实数 r ，方程组

$$\begin{cases} a^2+b^2=\dfrac{3}{2}, \\ 4+4(a+b)^2=r^2, \end{cases}$$

必然有四组解，它们对应 2 条不同的直线 l ，于是所求 r 的取值范围是 $(2,4)$.

解 D

14.2 全称与特称

理科第 15 题/文科第 15 题． 已知函数 $f(x)=2^x$ ， $g(x)=x^2+ax$ (其中 $a\in\mathbf{R}$)．对于不相等的实数 x_1 ， x_2 ，设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ， $n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$ ，现有如下命题:

① 对于任意不相等的实数 x_1 ， x_2 ，都有 $m>0$;
② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1,x_2 ，都有 $n>0$;
③ 对于任意的 a ，存在不相等的实数 x_1,x_2 ，使得 $m=n$;
④ 对于任意的 a ，存在不相等的实数 x_1,x_2 ，使得 $m=-n$.
其中的真命题有________(写出所有真命题的序号)．

分析 当 x_1,x_2 为任意不相等的实数时,“m 恒正”等价于“函数 $f(x)$ 为单调递增函数”,“m 恒负”等价于“函数 $f(x)$ 是单调递减函数”，于是 ① 正确．类似地，可以判断 ② 错误．
对于 ③ ， $m=n$ 等价于

$$f(x_1)-f(x_2)=g(x_1)-g(x_2),\ \text{即}\ f(x_1)-g(x_1)=f(x_2)-g(x_2),$$

也即函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 与某条水平直线（斜率为 0 ）有两个不同的公共点，等价于 $h(x)$ 不为单调函数，也即 $h'(x)$ 存在变号零点．事实上， $h(x)=2^x-x^2-ax$ ，于是 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=2^x\ln 2-2x-a,$$

其零点为直线 $y=a$ 与曲线 $y=2^x\ln 2-2x$ 的交点横坐标．考虑到

$$(2^x\ln 2-2x)'=2^x\ln^2 2-2,$$

于是 $y=2^x\ln 2-2x$ 有最小值，因此存在 a 使得 $h'(x)$ 没有零点，③ 错误．
对于④ ，采用与 ③ 类似的分析方法，只需要判断函数 $k(x)=f(x)+g(x)$ 的导函数

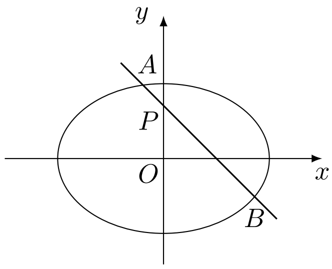
$$k'(x)=2^x\ln 2+2x+a$$

是否存在变号零点．考虑到 $y=2^x\ln 2+2x$ 是值域为 $\mathbf{R}$ 的单调递增函数，于是无论 a 取何值，$k'(x)$ 均存在变号零点，④ 正确．

解　①④

14.3　二童一马

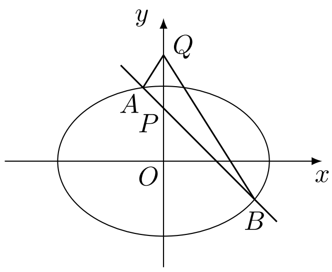
理科第 20 题．　如图，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A,B 两点．当直线 l 平行于 x 轴时，直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ ．



(1) 求椭圆 E 的方程；
(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，是否存在与点 P 不同的定点 Q ，使得 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立? 若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．

分析　*第 (1) 小题是考查椭圆的方程与基本量的常规问题．第 (2) 小题需要利用角平分线定理的逆定理，将条件 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 转化为较为容易处理的斜率问题，然后以直线 AB 的斜率为参数解决问题．*

解　(1) 根据题意，椭圆过点 $(\sqrt{2},1)$ 且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ．
(2) 若 Q 点存在，则 Q 一定在 y 轴上，不妨设 $Q(0,m)$ ．



当直线 AB 的斜率不存在时，由 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 可得 $Q(0,2)$ ．
当直线 AB 的斜率存在时，根据题意，可知 QP 是 $\angle AQB$ 的平分线，因此直线 AQ 与直线 BQ 的斜率之和为 0 ．
设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$ ，$A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$ ，则直线 AQ 与直线 BQ 的斜率之和

$$\begin{aligned}k_{AQ}+k_{BQ}&=\frac{y_1-m}{x_1}+\frac{y_2-m}{x_2}\\&=\frac{kx_1+1-m}{x_1}+\frac{kx_2+1-m}{x_2}\\&=2k+(1-m)\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1x_2},\end{aligned}$$

将直线 AB 的方程与椭圆 E 的方程联立可得

$$(1+2k^2)x^2+4kx-2=0,$$

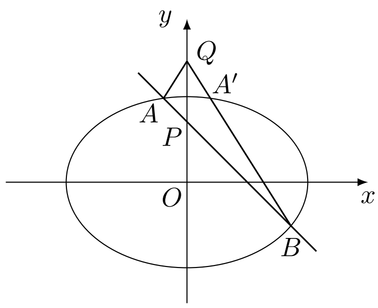
因此利用韦达定理可以计算得

$$k_{AQ}+k_{BQ}=2k+(1-m)\cdot 2k=2k(2-m),$$

因此当 $m=2$ 时符合题意.

综上 Q 点存在，且坐标为 $(0,2)$.

拓展　事实上，本题结论对一般的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$，$P(0,t)\,(\,0<t<b\,)$，$Q\left(0,\dfrac{b^2}{t}\right)$ 也成立. 在这里给出利用定比点差法[1]的证明，并且指出 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ ，且 $\overrightarrow{A'Q}=-\lambda\overrightarrow{QB}$ ，其中 A' 是 A 关于 y 轴的对称点，如图.



事实上，只需要在给定 $P(0,t)$ 和 λ 的情况下，证明 Q 点的坐标与 λ 无关，恒为 $\left(0,\dfrac{b^2}{t}\right)$ 即可.

设 $A(x_1,y_1)$ ， $A'(-x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，则

$$P\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right),$$

从而

$$x_1+\lambda x_2=0,\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=t,$$

由于

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\frac{\lambda^2x_2^2}{a^2}+\frac{\lambda^2y_2^2}{b^2}=\lambda^2,$$

两式相减，运用平方差公式并化简可得 Q 点纵坐标为

$$\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=\frac{b^2}{t},$$

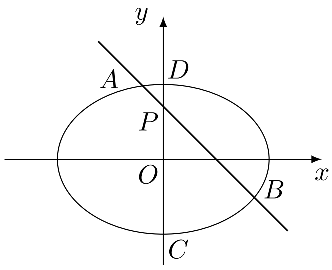
又 Q 点横坐标为

$$\frac{-x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=0,$$

因此命题得证.

文科第 **20** 题.　如图，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $P(0,1)$ 在短轴 CD 上，且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$.

[1] 详见附录『定比点差法』



(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设 O 为坐标原点，过点 P 的动直线与椭圆交于 A,B 两点. 是否存在常数 λ，使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在，求 λ 的值；若不存在，请说明理由.

分析 第 (1) 小题考查向量数量积的坐标运算以及椭圆的基本量与方程，属于常规问题. 第 (2) 小题引入直线 AB 的斜率为参数，将题中的代数式用 k 表达出来，然后进一步确定参数 λ 的值即可.

解　(1) 根据题意，有

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=(1+b)(1-b)=1-b^2=-1,$$

于是 $b^2=2$，结合 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线 AB 的方程与椭圆 E 的方程，有

$$(1+2k^2)x^2+4kx-2=0,$$

因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=x_1x_2+y_1y_2+\lambda\left[x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)\right]\\&=x_1x_2+(kx_1+1)(kx_2+1)+\lambda\left(x_1x_2+kx_1\cdot kx_2\right)\\&=(1+\lambda)(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1\\&=(1+\lambda)(1+k^2)\cdot\frac{-2}{1+2k^2}+k\cdot\frac{-4k}{1+2k^2}+1\\&=-\frac{2\lambda+1+2k^2\cdot(\lambda+2)}{1+2k^2},\end{aligned}$$

因此当 $2\lambda+1=\lambda+2$ 即 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 -3.

容易验证，当直线 AB 的斜率不存在时，亦有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$.

综上所述，存在常数 $\lambda=1$，使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 -3.

14.4　知其一，不知其二

理科第 21 题.　已知函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$，其中 $a>0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(2) 证明：存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究含参函数的单调性，求导后按参数展开讨论即可．第 (2) 小题实际上描述了函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有极小值点 x_0，且极小值为 0，但由于极小值点无法直接用 a 表示，因此需要先用 x_0 表示 a，消去 a 后得到对 x_0 的范围的估计，然后再由 a 与 x_0 的关系得到关于 a 的范围估计．

解 (1) 根据已知，有

$$g(x)=f'(x)=-2\ln x+2x-2-\frac{2a}{x}-2a,$$

于是

$$g'(x)=\frac{2}{x^2}\left(x^2-x+a\right),$$

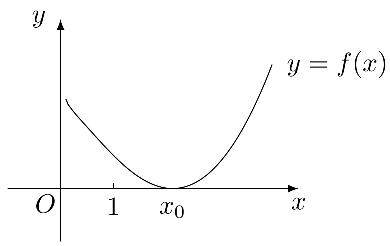
于是按 a 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系讨论如下．

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上单调递增．

(2) 用分析法证明如下．

根据题意结合第 (1) 小题的结论，函数 $f(x)$ 的图象应该如图所示．



考虑函数 $g(x)$，由于 $g'(1)=2a>0$，于是在 $(1,+\infty)$ 上 $g(x)$ 单调递增．又 $g(1)=-4a<0$，因此 $g(x)$ 有唯一零点 $x=x_0$，于是 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上先单调递减，再单调递增，有极小值点 $x=x_0$，则

$$\begin{cases}-\ln x_0+x_0-1-a\left(\dfrac{1}{x_0}+1\right)=0,\\-2(x_0+a)\ln x_0+x_0^2-2ax_0-2a^2+a=0,\end{cases}$$

我们的目标是证明这个二元方程组有实数解，且至少有一组解满足限制条件 $x_0>1$ 且 $0<a<1$．

采用消元的策略，由第一个方程可得

$$a=\frac{-\ln x_0+x_0-1}{x_0^{-1}+1},$$

代入第二个方程有

$$-2\left(x_0+\frac{-\ln x_0+x_0-1}{x_0^{-1}+1}\right)\ln x_0+x_0^2-2x_0\cdot\frac{-\ln x_0+x_0-1}{x_0^{-1}+1}-2\left(\frac{-\ln x_0+x_0-1}{x_0^{-1}+1}\right)^2+\frac{-\ln x_0+x_0-1}{x_0^{-1}+1}=0,$$

记该方程左边为 $\varphi(x_0)$ ，则 $\varphi(1)=1>0$ ，且

$$\varphi(\mathrm{e})=(\mathrm{e}-2)\left[-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}+1}-2\frac{\mathrm{e}-2}{\left(\mathrm{e}^{-1}+1\right)^2}\right]<0,$$

因此必然存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$ ，使得 $\varphi(x_0)=0$.

此时 $a=\dfrac{-\ln x_0+x_0-1}{x_0^{-1}+1}$ ，记该方程右边为 $\mu(x_0)$ ，则

$$\mu'(x_0)=\frac{x_0^2+x_0-2-\ln x_0}{(1+x_0)^2},$$

当 $x_0\in(1,\mathrm{e})$ 时，由于 $\ln x_0<x_0-1$ ，因此

$$x_0^2+x_0-2-\ln x_0>x_0^2-1>0,$$

因此 $\mu'(x_0)>0$ ，进而函数 $\mu(x_0)$ 单调递增，于是

$$0<a<\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}^{-1}+1}<1,$$

因此原命题得证.

文科第 **21** 题.　已知函数 $f(x)=-2x\ln x+x^2-2ax+a^2$ ，其中 $a>0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(2) 证明：存在 $a\in(0,1)$ ，使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

分析　*第 (1) 小题是利用导函数研究函数的单调性的常规问题. 第 (2) 小题是理科第 21 题的削弱版本，解题思路可以参考理科第 21 题的分析.*

解　(1) 根据题意，$f(x)$ 的导函数

$$g(x)=-2\ln x+2(x-1)-2a,$$

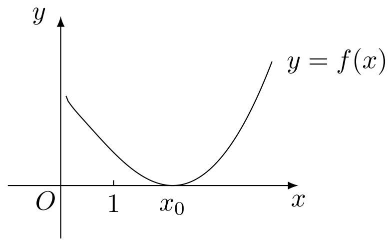
进一步，$g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=\frac{2(x-1)}{x},$$

因此函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 当 $0<a<1$ 且 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-2x\ln x+(x-a)^2>0$. 接下来用分析法研究区间 $(1,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 的图象与性质.

当 $a>0$ 时，由于 $g(1)=-2a<0$ ，结合 (1) 中结论，因此在区间 $(1,+\infty)$ 上，函数 $g(x)$ 存在唯一零点，设为 $x=x_0$. 同时 $x=x_0$ 也为函数 $f(x)$ 的极小值点，根据题意，有 $f(x_0)=0$ ，如图.



于是问题转化为方程组

$$\begin{cases} -2x_0\ln x_0 + x_0^2 - 2ax_0 + a^2 = 0, \\ a = x_0 - \ln x_0 - 1 \end{cases}$$

有解满足 $x_0 > 1$ 且 $0 < a < 1$.
将第二个式子代入第一个式子消元，化简得

$$\ln^2 x_0 - 2(x_0 - 1)\cdot\ln x_0 + 1 = 0.$$

令 $\varphi(t) = \ln^2 t - 2(t-1)\ln t + 1$ ， $t > 1$ ，则其导函数

$$\varphi'(t) = 2\cdot\left(\frac{1}{t} - 1\right)\cdot\ln t + \frac{2}{t} - 2 = 2\left(\frac{1}{t} - 1\right)(\ln t + 1) < 0,$$

因此 $\varphi(t)$ 单调递减.
又 $\varphi(1) = 1 > 0$ ，另一方面 $\varphi(\mathrm{e}) = 4 - 2\mathrm{e} < 0$ ，从而 $x_0 \in (1, \mathrm{e})$.
令 $\mu(t) = t - \ln t - 1$ ， $t > 1$ ，则其导函数

$$\mu'(t) = \frac{t-1}{t} > 0,$$

因此 $\mu(t)$ 单调递增，从而由 $a = \mu(x_0)$ 可得 $a \in (0, \mathrm{e} - 2)$ ，命题得证.

拓展　在解决理科题第 (2) 小题时，可以考虑研究函数 $\dfrac{f(x)}{x+a}$. 这样简化对数部分之后，极小值点可以由 a 直接表达. 同理，在解决文科题第 (2) 小题时，也可以考虑研究函数 $\dfrac{f(x)}{x}$.

第十五章　天津卷

15.1　对称性来帮忙

理科第 8 题．　已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\leqslant 2,\\ (x-2)^2, & x>2,\end{cases}$ 函数 $g(x)=b-f(2-x)$，其中 $b\in\mathbf{R}$．若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是（　　）

A. $\left(\dfrac{7}{4},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{7}{4}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{7}{4}\right)$　　D. $\left(\dfrac{7}{4},2\right)$

分析　函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点，即函数 $h(x)=f(x)+f(2-x)$ 的图象与直线 $y=b$ 的公共点的横坐标．接下来研究函数 $h(x)$．

显然 $h(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称 (因为 $h(2-x)=h(x)$)，因此考察其在区间 $[1,+\infty)$ 上的图象，然后再通过对称变换即可得到函数 $h(x)$ 的图象．

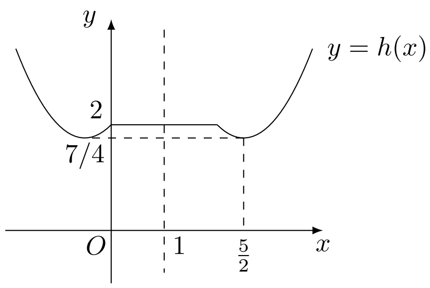
事实上，按 x 与 $1,2$ 的大小讨论可得当 $x\geqslant 1$ 时，有

$$h(x)=\begin{cases}(2-|x|)+(2-|2-x|), 1\leqslant x\leqslant 2,\\ (x-2)^2+(2-|2-x|), x>2,\end{cases}$$

即

$$h(x)=\begin{cases}2, 1\leqslant x\leqslant 2,\\ x^2-5x+8, x>2,\end{cases}$$

因此函数 $h(x)$ 的图象如图．



从而若函数 $h(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有 4 个不同的公共点，那么 b 的取值范围是 $\left(\dfrac{7}{4},2\right)$．

解 D

文科第 **8** 题. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\leqslant 2,\\(x-2)^2, & x>2,\end{cases}$ 函数 $g(x)=3-f(2-x)$，则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为 ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

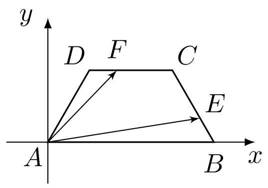
分析 是理科第 8 题的 $b=3$ 的情形，此时零点个数为 2，参考理科第 8 题的分析.

解 A

15.2 相关向量

理科第 **14** 题. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB\parallel DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60^\circ$. 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为________.

分析 如图，以 A 为原点建立平面直角坐标系，$B(2,0)$，$C\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}&=\left((1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\left(1-\frac{1}{9\lambda}\right)\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{17}{18}+\frac{\lambda}{2}+\frac{2}{9\lambda}\\&\geqslant\frac{17}{18}+2\sqrt{\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{2}{9\lambda}}=\frac{29}{18},\end{aligned}$$

其中等号当且仅当 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 时取得.

解 $\dfrac{29}{18}$

15.3 遍地开花

文科第 **14** 题. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x\,(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增，且函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\omega$ 对称，则 ω 的值为________.

分析 函数 $f(x)$ 即 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，其对称轴由方程 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 解得，因此

$$\omega^2+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\ \text{即}\ \omega^2=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}.$$

又函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增，因此其周期不小于 4ω，于是

$$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant 4\omega,\ \text{即}\ \omega^2\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

综上，$k=0$，从而 $\omega=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$．

解　$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

15.4　以形驭数

理科第 19 题．　已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，点 M 在椭圆上且位于第一象限，直线 FM 被圆 $x^2+y^2=\dfrac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c，$|FM|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

(1) 求直线 FM 的斜率；

(2) 求椭圆的方程；

(3) 设动点 P 在椭圆上，若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$，求直线 $OP\,(\,O$ 为原点) 的斜率的取值范围．

分析　*第 (1) 小题主要考查椭圆的基本量与方程、以及直线与圆的位置关系，计算量略大，属于常规问题．第 (2) 小题是一个典型的焦半径问题，可以利用椭圆的第一定义和解三角形解决．第 (3) 小题需要将直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$ 这一代数条件转化为几何图形上的点的范围，然后借助图形简化问题后通过代数手段得到临界位置，进而求解问题．*

解　(1) 设直线 FM 的斜率为 $k\,(\,k>0\,)$，则直线 FM 的方程为 $y=k(x+c)$，因此原点 O 到直线 FM 的距离为 $\dfrac{|kc|}{\sqrt{1+k^2}}$．

另一方面，由于直线 FM 被圆截得的弦长为 c，于是圆心 O 到直线 FM 的距离为 $\sqrt{\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{c^2}{4}}$．

因此由方程

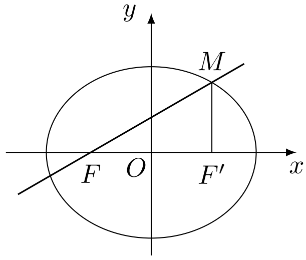
$$\frac{|kc|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{c^2}{4}}$$

得

$$\frac{k^2}{1+k^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{c^2}-\frac{1}{4},$$

又由椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 可知 $\dfrac{b^2}{c^2}=2$，因此解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

(2) 设椭圆的另一个焦点为 $F'(c,0)$，连接 MF'，如图．

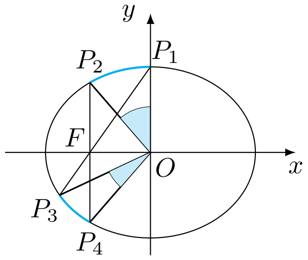


那么在 $\triangle MFF'$ 中应用余弦定理得

$$|MF'|^2=|MF|^2+|FF'|^2-2\cdot|MF|\cdot|FF'|\cdot\cos\angle MFF',$$

将 $|MF|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ，$|MF'|=2\sqrt{3}c-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ ，$|FF'|=2c$ ，以及 $\angle MFF'=\dfrac{\pi}{6}$ (第 (1) 小题的结论) 代入，展开整理即可解得 $c=1$. 从而椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(3) 如图，当 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$ 时，P 在曲线段 P_1P_2 和 P_3P_4 上 (不包含端点) 运动，其中 P_1,P_3 是过点 F 且斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线与椭圆的两个交点 (P_1 在 x 轴上方，P_3 在 x 轴下方)，P_2,P_4 是过点 F 且与 x 轴垂直的直线与椭圆的两个交点 (P_2 在 x 轴上方，P_4 在 x 轴下方).



分别将直线 $y=\sqrt{2}(x+1)$ 与直线 $x=-1$ 与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 联立，可得

$$P_1(0,\sqrt{2}),P_2\left(-1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right),P_3\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),P_4\left(-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

于是直线 OP 斜率的取值范围是 $(-\infty,k_{OP_2})\cup(k_{OP_3},k_{OP_4})$ ，即 $\left(-\infty,-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

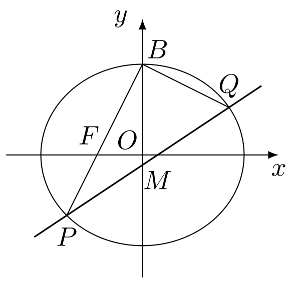
拓展　对于焦点为 F_1 、F_2 ，焦距为 $2c$ 的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 而言，其上一点 P 到某个焦点 F_1 的距离为

$$\left|PF_1\right|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta},$$

其中 θ 是向量 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 与向量 $\overrightarrow{F_1P}$ 的夹角.

15.5　腾挪忽灵

文科第 19 题.　已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的上顶点为 B ，左焦点为 F ，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



(1) 求直线 BF 的斜率；

(2) 设直线 BF 与椭圆交于 $P\,(P$ 异于点 $B)$，过点 B 且垂直于 BP 的直线与椭圆交于点 $Q\,(Q$ 异于

点 B)，直线 PQ 与 y 轴交于点 M，$|PM| = \lambda|MQ|$.

(i) 求 λ 的值;

(ii) 若 $|PM|\sin\angle BQP = \dfrac{7\sqrt{5}}{9}$，求椭圆的方程.

分析 第 *(1)* 小题考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题. 第 *(2)* 小题可以先计算 P,Q 两点的横坐标，然后计算 λ；在第 *(i)* 小问的提示下将第 *(ii)* 小问的条件稍加转化就可以顺利求解. 如果在计算 P,Q 两点的坐标时注意到二者的相关性，那么就可以通过一次联立两次赋值求出坐标，从而简化运算.

解　(1) 直线 BF 的斜率为
$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{e^2}-1} = 2.$$

(2) 由椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，可得 $a^2 = \dfrac{5}{4}b^2$，因此椭圆方程为 $\dfrac{4x^2}{5b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

设过点 B 的直线 $y = kx + b$ 与椭圆交于另一点 N，则联立该直线方程与椭圆方程，得
$$(4+5k^2)x^2 + 10kbx = 0,$$
于是 N 点的横坐标为 $-\dfrac{10kb}{4+5k^2}$.

当 k 取 2 时，可得 P 点的横坐标 $x_P = -\dfrac{5b}{6}$；

当 k 取 $-\dfrac{1}{2}$ 时，可得 Q 点的横坐标 $x_Q = \dfrac{20b}{21}$.

(i) 根据题意，$\lambda = \left|\dfrac{x_P}{x_Q}\right| = \dfrac{7}{8}$.

(ii) 根据题意，结合 (i) 中的结论有
$$|PM|\sin\angle BQP = \frac{7}{15}\cdot|PQ|\cdot\sin\angle BQP = \frac{7}{15}\cdot|BP| = \frac{7\sqrt{5}}{9},$$
于是 $|BP| = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$；

另一方面，由弦长公式，有
$$|BP| = \sqrt{1^2+2^2}\cdot|x_P - 0| = \frac{5\sqrt{5}b}{6},$$
因此可得 $b = 2$，从而椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

15.6　以直代曲

理科第 **20** 题/文科第 **20** 题.　已知函数 $f(x) = nx - x^n$，$x \in \mathbf{R}$[1]，其中 $n \in \mathbf{N}^*$，且 $n \geqslant 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$，求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x) \leqslant g(x)$；

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2，求证：$|x_2 - x_1| < \dfrac{a}{1-n} + 2$.

[1] 文科第 20 题中 $n = 4$

分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，第 (2) 小题考查利用导函数求曲线的切线方程，以及简单的函数不等式的证明，均属于常规问题．其中第 (2) 小题为第 (3) 小题的证明指出了“以直代曲”的关键思路，只需要再求出函数 $f(x)$ 在原点处的切线进行“两边夹”即可．

解 (1) 根据题意，有

$$f'(x)=n-nx^{n-1},$$

于是按 n 是奇数或偶数讨论．

当 n 为奇数时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 n 为偶数时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．

(2) 根据题意，P 的坐标为 $P\left(n^{\frac{1}{n-1}},0\right)$，于是曲线在点 P 处的切线方程为

$$g(x)=\left(n-n^2\right)\left(x-n^{\frac{1}{n-1}}\right),$$

进而

$$g(x)-f(x)=x^n-n^2x+\left(n^2-n\right)\cdot n^{\frac{1}{n-1}},$$

其导函数为

$$(g(x)-f(x))'=nx^{n-1}-n^2,$$

于是在区间 $(0,+\infty)$ 上，函数 $g(x)-f(x)$ 在 $x=n^{\frac{1}{n-1}}$ 处取得极小值，同时也为最小值 0．因此原命题得证．

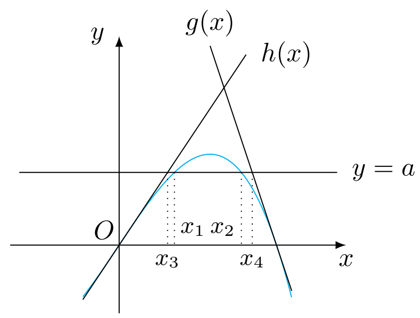
(3) 显然符合题意的 $a>0$．

不妨设 $0<x_1<x_2<n^{\frac{1}{n-1}}$，以下所有 x 的范围默认为 $\left[0,n^{\frac{1}{n-1}}\right]$．

考虑函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线 $h(x)=nx$，由于

$$h(x)-f(x)=x^n\geqslant 0,$$

于是可得 $f(x)\leqslant h(x)$，如图．



因此我们可以利用直线 $y=g(x)$ 与 $y=h(x)$ 对 x_1,x_2 进行线性估计 (以直代曲)．

设 $f(x_1)=h(x_3)=g(x_4)=f(x_2)=a$，则有

$$x_3<x_1<x_2<x_4,$$

于是有

$$|x_1 - x_2| < x_4 - x_3 = \left(\frac{a}{n-n^2} + n^{\frac{1}{n-1}}\right) - \frac{a}{n} = \frac{a}{1-n} + n^{\frac{1}{n-1}},$$

接下来只需要证明 $n^{\frac{1}{n-1}} \leqslant 2$，即 $n \leqslant 2^{n-1}$．事实上，根据二项式定理，有

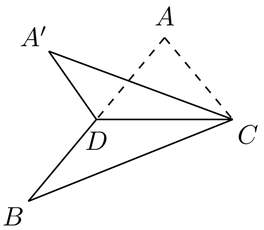
$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geqslant 1 + \mathrm{C}_{n-1}^{1} = n,$$

等号当且仅当 $n=2$ 时取得．因此原命题得证．

第十六章　浙江卷

16.1　中线折叠

理科第 8 题．　如图，已知 $\triangle ABC$ ，D 是 AB 的中点，沿直线 CD 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle A'CD$ ，所成二面角 $A'-CD-B$ 的平面角为 α ，则（　　）



A. $\angle A'DB \leqslant \alpha$　　B. $\angle A'DB \geqslant \alpha$　　C. $\angle A'CB \leqslant \alpha$　　D. $\angle A'CB \geqslant \alpha$

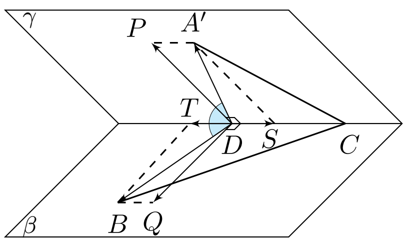
分析 先通过研究一些特殊位置得到答案．

取 $\alpha=\pi$ ，此时 $\angle A'DB=\pi$ ，$\angle A'CB<\pi$ ，排除 D;

取 $\alpha=0$ ，此时 $\angle A'DB>0$ 或 $\angle A'DB=0$ ，$\angle A'CB>0$ 或 $\angle A'CB=0$ ，排除 A，C;

从而正确答案应该是 B.

下面证明在任何情形下均有 $\angle A'DB \geqslant \alpha$ ．如图，设 $\triangle A'DC$ 和 $\triangle BDC$ 所在的平面分别是 γ 和 β ，过点 D 分别在平面 γ,β 内作 CD 的垂线 l_1,l_2 ，过点 A',B 分别向 l_1,l_2 作垂线，垂足为 P,Q ，则 $\angle PDQ$ 即为二面角 $A'-DC-B$ 的平面角 α ．过 A',B 分别向直线 CD 作垂线，垂足为 S,T ，由于 $\angle A'DC=\pi-\angle BDC=\angle BDT$ ，于是 $|DS|=|DT|$ ，且 $|DP|=|DQ|$ ．



不妨设 $\overrightarrow{DP},\overrightarrow{DQ}$ 为单位向量，分别为 $\vec{a},\vec{b}$ ，并设 $\overrightarrow{DS}=\vec{x}$ ，且 $|DS|=m$ ，则

$$\overrightarrow{DA'}=\vec{a}+\vec{x},\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{x},$$

于是

$$\begin{aligned}\cos\angle A'DB &= \frac{\overrightarrow{DA'}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DA'}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}\\ &= \frac{(\vec{a}+\vec{x})\cdot\left(\vec{b}-\vec{x}\right)}{1+m^2}\\ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}-m^2}{1+m^2}\\ &= \frac{\cos\alpha-m^2}{1+m^2}\leqslant\cos\alpha,\end{aligned}$$

因此 $\angle A'DB\geqslant\alpha$ ，等号当且仅当 $m=0$ ，也即 $AB\perp CD$ 时取得.

解 B

16.2 确凿无疑

文科第 **8** 题. 设实数 a,b,t 满足 $|a+1|=|\sin b|=t$. ( )

A. 若 t 确定，则 b^2 唯一确定

B. 若 t 确定，则 a^2+2a 唯一确定

C. 若 t 确定，则 $\sin\dfrac{b}{2}$ 唯一确定

D. 若 t 确定，则 a^2+a 唯一确定

分析 先通过特殊值法得到答案.

取 $t=1$ ，则 $a=0$ 或 $a=-2$ ，$b=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbf{Z})$，此时 $a^2+a=0$ 或 $a^2+a=2$ ，排除 D；b^2 和 $\sin\dfrac{b}{2}$ 的值明显不唯一，排除 A,C;

因此正确答案是 B.

事实上，$a^2+2a=|a+1|^2-1=t^2-1$ ，因此当 t 确定时，a^2+2a 的值就唯一确定了.

解 B

16.3 向量的几何意义

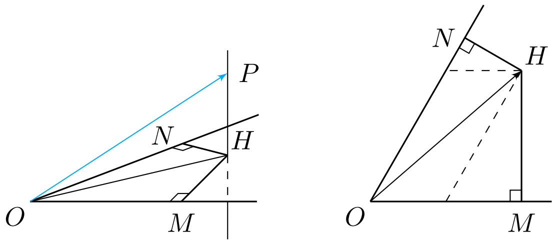
理科第 **15** 题. 已知 $\vec{e}_1$ ，$\vec{e}_2$ 是空间单位向量，$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\dfrac{1}{2}$ ，若空间向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b}\cdot\vec{e}_1=2$ ，$\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\dfrac{5}{2}$ ，且对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$ ，$\left|\vec{b}-(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\right|\geqslant\left|\vec{b}-(x_0\vec{e}_1+y_0\vec{e}_2)\right|=1\,(x_0,y_0\in\mathbf{R})$，则 $x_0=$________，$y_0=$________，$\left|\vec{b}\right|=$________.

分析 如图，将所有向量的起点统一为 O ，$\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=\dfrac{\pi}{3}$. 在向量 $\vec{e}_1$ ，$\vec{e}_2$ 所在的两条射线上分别取 $OM=2$ ，$ON=\dfrac{5}{2}$ ，分别过点 M 、N 作与射线 OM 、ON 垂直的平面，则向量 $\vec{b}$ 的终点 P 在这两个平面的交线上. 记此交线与平面 MON 的交点为 H .

根据题意，向量 $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ 的终点 Q 可以取遍整个平面 MON ，此时

$$|PQ|=\left|\vec{b}-(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)\right|,$$

其最小值为 $|PH|$，且 $|PH|=1$.



进而分析平面 MON，可以得到 $\overrightarrow{OH}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$，于是 $x_0=1$，$y_0=2$. 而

$$\left|\vec{b}\right|^2=|OH|^2+|PH|^2=8,$$

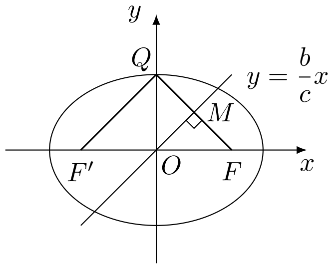
因此 $\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$.

解　1，2，$2\sqrt{2}$

16.4　无独有偶

文科第 **15** 题.　椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的右焦点 $F\,(c,0)$ 关于直线 $y=\dfrac{b}{c}x$ 的对称点 Q 在椭圆上，则椭圆的离心率是________.

分析 如图，设直线 QF 与直线 $y=\dfrac{b}{c}x$ 的交点为 M，过 Q 作直线 $y=\dfrac{b}{c}x$ 的平行线，交 x 轴于点 F'.

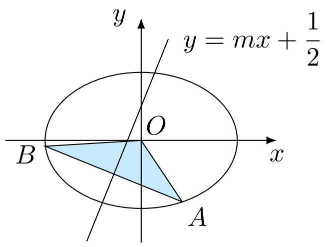


因为 M 平分线段 QF，于是 O 平分线段 $F'F$，因此 F' 为椭圆的左焦点. 进而由 $F'Q$ 的斜率为 $\dfrac{b}{c}$ 可知 Q 为椭圆的上顶点，因此 $\triangle F'QF$ 为等腰直角三角形，进而不难得到 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16.5　椭圆与圆

理科第 **19** 题.　已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两个不同的点 A,B 关于直线 $y=mx+\dfrac{1}{2}$ 对称.



(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值 (O 为坐标原点).

分析 第 *(1)* 小题是有关弦的中点的问题，可以利用椭圆的“垂径定理”[1]解决. 第 *(2)* 小题中所求的 $\triangle AOB$ 的面积的最大值可以通过伸缩变换后在圆中轻松求出.

解 (1) 设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$ ， $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$.
由 A,B 两点均在椭圆上，有

$$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1,\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1,$$

两式相减，并应用平方差公式，可得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0,$$

于是

$$\left(x_0-\frac{2y_0}{m}\right)\cdot(x_1-x_2)=0,$$

又根据椭圆的对称性， $x_1\neq x_2$ ，于是

$$x_0-\frac{2y_0}{m}=0,$$

又点 M 在直线 $y=mx+\dfrac{1}{2}$ 上，于是

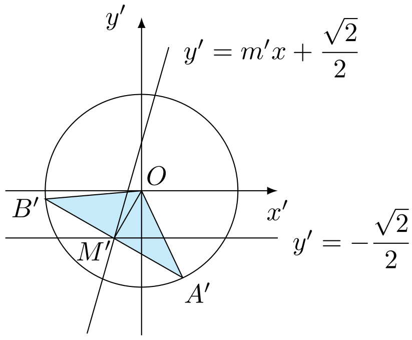
$$y_0=mx_0+\frac{1}{2},$$

从而可以解得 $x_0=-\dfrac{1}{m}$ ， $y_0=-\dfrac{1}{2}$.
实数 m 的取值范围由不等式

$$\frac{\left(-\frac{1}{m}\right)^2}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2<1$$

确定，解得 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$.

(2) 作伸缩变换 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=\sqrt{2}y,\end{cases}$ 则椭圆变为圆 $x'^2+y'^2=2$,直线 $l:y=mx+\dfrac{1}{2}$ 变为 $l':y'=\sqrt{2}m\cdot x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，且有 $S_{\triangle A'OB'}=\sqrt{2}S_{\triangle AOB}$.



[1]详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』

根据第 (1) 小题的结论，点 M' 在直线 $y'=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 上，于是由 m 的取值范围可得 $|OM'|$ 的取值范围是

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<|OM'|<\sqrt{2},$$

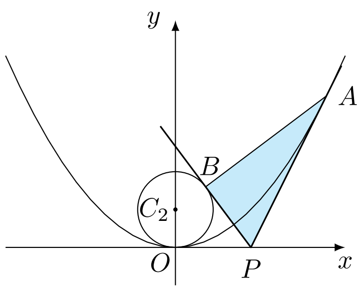
于是三角形 $A'OB'$ 的面积

$$S_{\triangle A'OB'}=\frac{1}{2}|A'B'|\cdot|OM'|=\sqrt{|OM'|^2\cdot(2-|OM'|^2)}\leqslant 1,$$

等号当且仅当 $|OM'|=1$ 时取得，因此 $\triangle AOB$ 的面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16.6　夹缝中求面积

文科第 **19** 题.　如图，已知抛物线 $C_1:y=\dfrac{1}{4}x^2$ ，圆 $C_2:x^2+(y-1)^2=1$ ，过点 $P(t,0)\,(t>0)$ 作不过原点 O 的直线 PA,PB 分别与抛物线 C_1 和圆 C_2 相切，A,B 为切点.



(1) 求点 A,B 的坐标；
(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积.
注：直线与抛物线有且只有一个公共点，且与抛物线的对称轴不平行，则称该直线与抛物线相切，称该公共点为切点.

分析　*第 (1) 小题需要分别求解直线与抛物线的位置关系和直线与圆的位置关系. 其中直线与抛物线的位置关系可以通过代数手段处理，而直线与圆的位置关系可以利用几何条件稍作化简后再代入处理，二者均属常规问题. 第 (2) 小题在第 (1) 小题的基础上 (尤其是抛物线的切线方程已知) 很容易求解.*

解　(1) 设直线 PA 的方程为 $PA:y=k(x-t)$ ，联立直线方程与抛物线方程，可得

$$x^2-4kx+4kt=0,\ \text{即}\ (x-2k)^2+4k(t-k)=0,$$

于是可得 $k=t\,(k=0$ 舍去)，同时 A 点的横坐标为 $2k=2t$ ，因此 $A(2t,t^2)$.
注意到直线 PO 与圆 C_2 相切，因此 B 点是 O 点关于直线 $PC_2:y=-\dfrac{1}{t}x+1$ 的对称点. 设 $B(m,n)$ ，则

$$\frac{n}{m}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)=-1,\frac{n}{2}=-\frac{1}{t}\cdot\frac{m}{2}+1,$$

解得

$$m=\frac{2t}{1+t^2},n=\frac{2t^2}{1+t^2},$$

于是 B 点坐标为 $\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{2t^2}{1+t^2}\right)$.

(2) 由 (1) 中结论，$PA:y=tx-t^2$，因此点 B 到直线 PA 的距离为

$$\frac{\left|t\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{2t^2}{1+t^2}-t^2\right|}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}},$$

于是三角形 PAB 的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot|t|\cdot\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}t^3.$$

16.7 辅助数列

理科第 **20** 题. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=a_n-a_n^2\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$.

(1) 证明：$1\leqslant\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 2\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$;

(2) 设数列 $\left\{a_n^2\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$\dfrac{1}{2\,(n+2)}\leqslant\dfrac{S_n}{n}\leqslant\dfrac{1}{2\,(n+1)}\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$.

分析 *第 (1) 小题可以利用递推公式将欲证不等式转化为数列的上下界问题，然后借助数学归纳法完成证明. 第 (2) 小题中，数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于不动点 0，而题目需要估计数列 $\{a_n\}$ 的上下界，此时通常无法直接从通项入手，可以考虑*

$$a_{n+1}-a_n,a_{n+1}^2-a_n^2,\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n},\cdots$$

等类似于差分的辅助数列进行估计.

解 (1) 注意到 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{1-a_n}$，于是只需要证明 $0<a_n\leqslant\dfrac{1}{2}$，下面通过数学归纳法证明该命题.

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{2}$ 命题显然成立；

假设当 $n=k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$a_{k+1}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-a_k\right)^2,$$

显然有 $0<a_{k+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 成立.

综上，原命题得证.

(2) 注意到 $a_n^2=a_n-a_{n+1}$，于是累加得

$$S_n=a_1-a_{n+1}=\frac{1}{2}-a_{n+1},$$

因此欲证明命题为

$$\frac{n}{2(n+2)}\leqslant\frac{1}{2}-a_{n+1}\leqslant\frac{n}{2(n+1)},$$

整理得

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqslant a_{n+1}\leqslant\frac{1}{n+2},$$

下面证明这个不等式.

根据已知，有

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

于是由第 (1) 小题的结果得

$$1\leqslant\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\leqslant 2,$$

因此累加得

$$n\leqslant\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\leqslant 2n,$$

将 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 代入即得

$$n+2\leqslant\frac{1}{a_{n+1}}\leqslant 2(n+1),$$

因此原命题得证.

16.8　处理参数

文科第 **20** 题.　设函数 $f(x)=x^2+ax+b\,(a,b\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $b=\dfrac{a^2}{4}+1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式；

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点，$0\leqslant b-2a\leqslant 1$ ，求 b 的取值范围.

分析　第 (1) 小题为含参二次函数在限制区间上的最小值问题，按对称轴和区间的关系展开讨论即可. 第 (2) 小题可以以系数为参数，通过解决规划问题得到 b 的取值范围，也可以引入零点作为参数，然后将原有参数 a 消去后得到 b 的取值范围.

解　(1) 当 $b=\dfrac{a^2}{4}+1$ 时，$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+1$ ，按 $-\dfrac{a}{2}$ 与 $-1,1$ 的大小关系讨论.

当 $a\leqslant -2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，$g(a)=f(1)=\dfrac{1}{4}a^2+a+2$;

当 $-2<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-1,-\dfrac{a}{2}\right]$ 上单调递减，在区间 $\left[-\dfrac{a}{2},1\right]$ 上单调递增，$g(a)=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=1$;

当 $a\geqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递增，$g(a)=f(-1)=\dfrac{1}{4}a^2-a+2$.

综上，$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}a^2+a+2, & a\in(-\infty,-2],\\ 1, & a\in(-2,2),\\ \dfrac{1}{4}a^2-a+2, & a\in[2,+\infty).\end{cases}$

(2) 方法一

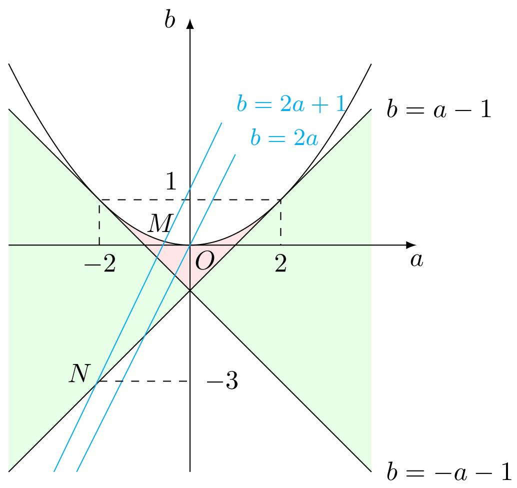
根据题意，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点即

$$f(-1)\cdot f(1)\leqslant 0\ \text{或}\ \begin{cases}\Delta=a^2-4b\geqslant 0,\\ -\dfrac{a}{2}\in(-1,1),\\ f(-1)>0,\\ f(1)>0,\end{cases}$$

即

$$(a-b-1)(a+b+1)\geqslant 0 \text{ 或 } \begin{cases} a^2\geqslant 4b, \\ -2<a<2, \\ a-b-1<0, \\ a+b+1>0, \end{cases}$$

在平面直角坐标系 aOb 中，注意到直线 $a-b-1=0$ 与抛物线 $b=\dfrac{1}{4}a^2$ 相切于 $(2,1)$，直线 $a+b+1=0$ 与抛物线 $b=\dfrac{1}{4}a^2$ 相切于 $(-2,1)$，又有 $2a\leqslant b\leqslant 2a+1$，因此规划如图.



可以计算得点 $M\left(4-2\sqrt{5},9-4\sqrt{5}\right)$，$N(-2,-3)$，因此 b 的取值范围是 $\left[-3,9-4\sqrt{5}\right]$.

方法二

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的零点为 $x=\alpha$.

第一种情况，$\alpha=0$ 时，此时 $b=0$.

第二种情况，$\alpha\neq 0$ 时，此时 $f(x)$ 有另外一个零点 $x=\dfrac{b}{\alpha}$，于是

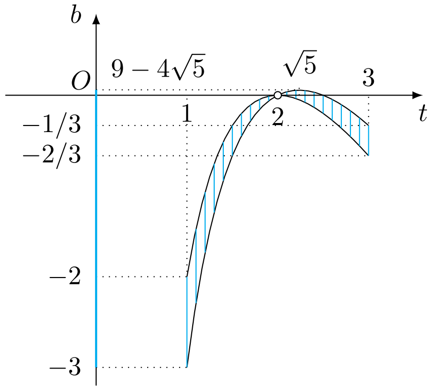
$$-a=\alpha+\frac{b}{\alpha},$$

又根据题意 $0\leqslant b-2a\leqslant 1$，即 $-\dfrac{b}{2}\leqslant -a\leqslant \dfrac{1-b}{2}$，因此

$$-\frac{b}{2}\leqslant \alpha+\frac{b}{\alpha}\leqslant \frac{1-b}{2},$$

从而 b 在 $\dfrac{\alpha-2\alpha^2}{2+\alpha}$ 与 $\dfrac{-2\alpha^2}{2+\alpha}$ 之间.

令 $t=2+\alpha$，则 $t\in[1,3]$ 且 $t\neq 2$，此时可得 b 在 $9-2\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$ 和 $8-2\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$ 之间. 在同一个坐标系中画出函数 $b=9-2\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$ 与函数 $b=8-2\left(t+\dfrac{4}{t}\right)$ 的图象，如图.



可得 b 的取值范围为 $[-3,0)\cup\left(0,9-4\sqrt{5}\right]$.

综合以上两种情况可得 b 的取值范围是 $\left[-3,9-4\sqrt{5}\right]$.