高考压轴题的分析与解
2014 年

兰琦

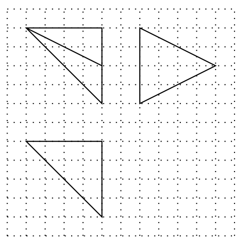
2016 年 11 月 18 日

目录

第一章　新课标 I 卷

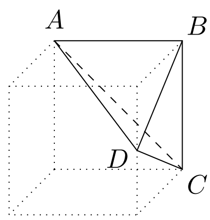
1.1　三视图还原

理科第 12 题.　如图，网格纸上小正方形的边长为 1，实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　　）



A. $6\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 6　　D. 4

分析 在正方体中还原直观图，如图.



显然有 $AC > CD = BD > AB = BC$，因此只需要比较 AC 与 AD 的大小．事实上，$AC = 4\sqrt{2}$，而 $AD = 6$，因此最长的棱为 AD，长度为 6.

解　C

1.2　分离变量

文科第 12 题.　已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0 > 0$，则 a 的取值范围是（　　）

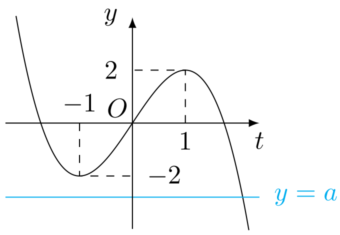
A. $(-\infty, -2)$　　B. $(1, +\infty)$　　C. $(2, +\infty)$　　D. $(-\infty, -1)$

分析 函数 $f(x)$ 中 a 与 x 很容易分离到等号两边，可以考虑使用分离变量的方式处理零点问题.
显然 $x = 0$ 不是函数 $f(x)$ 的零点，因此以下讨论中默认 $x \neq 0$.

将方程 $ax^3-3x^2+1=0$ 变形为

$$a=-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x},$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$ ，则 $a=-t^3+3t$. 因此问题即函数 $g(t)=-t^3+3t$ 的图象与直线 $y=a$ 有且只有一个公共点，且该公共点的横坐标大于 0 .



如图，作出函数 $g(t)$ 的图象，可得 a 的取值范围是 $(-\infty,-2)$.

解　A

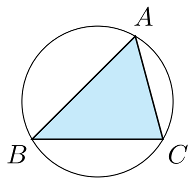
1.3　烈火出真金

理科第 16 题.　已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的角 A,B,C 的对边， $a=2$ ，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为________.

分析 由已知条件结合正弦定理可得

$$(a+b)(a-b)=(c-b)c,$$

整理得 $b^2+c^2-a^2=bc$ ，从而由余弦定理可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

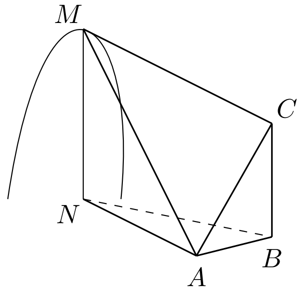


由于三角形 ABC 的边 BC 所对的角 A 为定角 $\dfrac{\pi}{3}$ ，因此 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径是定值. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆，固定 B,C ，则 A 在优弧 BC 上运动 (不包含端点)，以 BC 为底边考虑 $\triangle ABC$ 的面积，当 A 平分优弧 BC 时 BC 边上的高最大，因此三角形面积取得最大值，此时三角形为正三角形，面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$.

解　$\sqrt{3}$

1.4　隔空测物

文科第 16 题.　如图，为测量山高 MN ，选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN=60^\circ$ ， C 点的仰角 $\angle CAB=45^\circ$ 以及 $\angle MAC=75^\circ$ ；从 C 点测得 $\angle MCA=60^\circ$. 已知山高 $BC=100$ m ，则山高 $MN=$________ m .



分析 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=100$，$\angle CAB=45^\circ$，可得 $AC=100\sqrt{2}$.
在 $\triangle MAC$ 中，$\angle MCA=60^\circ$，$\angle MAC=75^\circ$，$AC=100\sqrt{2}$，应用正弦定理，有

$$\frac{MA}{\sin\angle MCA}=\frac{AC}{\sin\angle AMC},$$

解得 $MA=100\sqrt{3}$.
在 Rt$\triangle MNA$ 中，$MA=100\sqrt{3}$，$\angle MAN=60^\circ$，可以解得

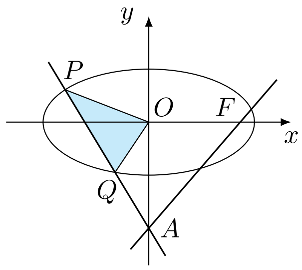
$$MN=\frac{\sqrt{3}}{2}MA=150,$$

所以山高 MN 为 150 m.

解　150

1.5　化椭为圆

理科第 20 题.　已知点 $A(0,-2)$，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆 E 的右焦点，直线 AF 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.



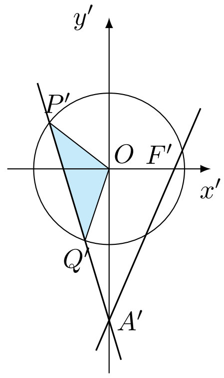
(1) 求 E 的方程;
(2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P,Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求 l 的方程.

分析 第 *(1)* 小题考查斜率公式以及椭圆的方程与基本量，属于常规问题. 第 *(2)* 小题可以利用仿射变换[1]将 $\triangle PQO$ 的面积的最大值问题转化到圆中解决.

[1]详见附录『仿射变换』

解 (1) 设 $F(c,0)$，由直线 AF 的斜率 $\dfrac{2}{c}$ 为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，可得 $c=\sqrt{3}$，进而由离心率 $\dfrac{c}{a}$ 为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $a=2$，故 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 在伸缩变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y \end{cases}$ 下，椭圆变为圆 $x'^2+y'^2=4$，此时 $P'Q'$ 过定点 $A'(0,-4)$，且 $S_{\triangle OP'Q'}=2S_{\triangle OPQ}$，如图.



由于 $\angle P'OQ'$ 的取值范围是 $(0,\pi)$，因此当 $\angle P'OQ'$ 为直角时，$S_{\triangle P'OQ'}$ 的面积最大. 此时 O 到直线 $P'Q'$ 的距离为 $\sqrt{2}$.

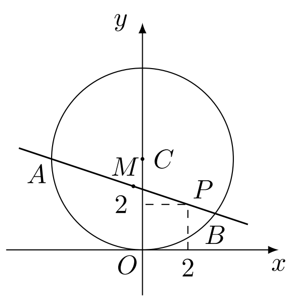
设此时 $P'Q'$ 的方程为 $y'=k'x'-4$，则有

$$\frac{4}{\sqrt{1+k'^2}}=\sqrt{2},$$

解得 $k'=\pm\sqrt{7}$. 从而直线 PQ 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，所求直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

1.6 点动成圆

文科第 20 题. 已知点 $P(2,2)$，圆 $C:x^2+y^2-8y=0$，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 M，O 为坐标原点.



(1) 求 M 的轨迹方程；

(2) 当 $|OP|=|OM|$ 时，求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

分析 *第 (1) 小题是典型的轨迹问题，利用几何性质进行推理可以大大减少运算量. 第 (2) 小题是在第 (1) 小题基础上的三角形面积计算的问题，利用几何量的数量关系可以简化运算.*

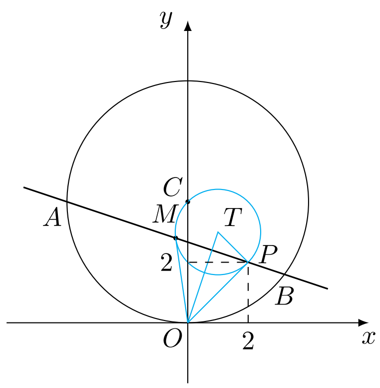
解　(1) 圆 C 的标准方程为 $C: x^2+(y-4)^2=16$，圆心坐标为 $C(0,4)$．连接 CM，根据垂径定理，有 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (该式在 M 点与 C 点重合，或 M 点与 P 点重合时也成立)，因此所求的轨迹方程为

$$x(x-2)+(y-2)(y-4)=0,$$

整理得

$$x^2+y^2-2x-6y+8=0.$$

(2) 由 (1) 的结论可知 M 的轨迹是以 $T(1,3)$ 为圆心 $\sqrt{2}$ 为半径的圆．注意到 OP 与 TP 垂直，因此 OP 为圆 T 的切线，过 O 作圆 T 的另外一条切线，切点即 M (考虑到 P,O,M 构成三角形，因此 $P\neq M$)，如图．



因为 $OT\perp AB$，直线 OT 的斜率为 3，因此直线 l 的斜率为 $-\dfrac{1}{3}$，进而直线 l 的方程为

$$y=-\frac{1}{3}(x-2)+2,\ \text{即}\ x+3y-8=0.$$

容易求得 $|OM|=|OP|=2\sqrt{2}$，接下来计算 $\sin\angle POM$．由于

$$\tan\angle POT=\frac{TP}{OP}=\frac{1}{2},$$

进而

$$\sin\angle POM=\frac{2\tan\angle POT}{1+\tan^2\angle POT}=\frac{4}{5},$$

从而三角形 POM 的面积为

$$\frac{1}{2}\sin\angle POM\cdot OP^2=\frac{16}{5}.$$

1.7　天堑变通途

理科第 21 题．　设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$．

(1) 求 a,b；

(2) 证明：$f(x)>1$．

分析 第 *(1)* 小题考查利用导函数求曲线的切线方程，属于常规问题．第 *(2)* 小题中欲证明的不等式同时包含指数函数与对数函数，因此不适合直接求导研究单调性．事实上，在适当的代数变形后可以发现沟通指数函数与对数函数的“桥梁”，利用这个“桥函数”，就可以将欲证不等式分割为两个类似的部分加以证明了．

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ，其导函数

$$f'(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\frac{a\mathrm{e}^x}{x}-\frac{b}{x^2}\mathrm{e}^{x-1}+\frac{b}{x}\mathrm{e}^{x-1}.$$

由题意知 $f(1)=2$ ， $f'(1)=\mathrm{e}$ ，代入解得 $a=1$ ， $b=2$ ．
(2) 由第 (1) 小题的结论可得 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{x-1}$ ．从而 $f(x)>1$ 等价于

$$x\ln x-x\mathrm{e}^{-x}>-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

设函数 $g(x)=x\ln x$ ，则 $g(\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}$ ，所以欲证不等式即

$$g(x)+g(\mathrm{e}^{-x})>-\frac{2}{\mathrm{e}},$$

接下来研究函数 $g(x)$ 的最小值．
由于 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=1+\ln x,$$

当 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$g'(x)<0$ ；当 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$g'(x)>0$ ．故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增．从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ．
回到原问题，我们有

$$g(x)+g(\mathrm{e}^{-x})\geqslant-\frac{2}{\mathrm{e}},$$

当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$\mathrm{e}^{-x}\neq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ，于是等号无法取得，这样我们就证明了不等式 $f(x)>1$ ．

1.8 寻找最小值

文科第 **21** 题． 设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx\,(a\neq1)$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0 ．
(1) 求 b ；
(2) 若存在 $x_0\geqslant1$ 使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$ ，求 a 的取值范围．

分析 第 *(1)* 小题考查利用导函数研究曲线的切线方程，属于常规问题．第 *(2)* 小题是一个典型的存在性问题，需要转化为最值问题，利用导函数研究函数的单调性解决．

解 (1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{(1-a)x^2-bx+a}{x},$$

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线斜率为 0 ，因此 $f'(1)=1-a-b+a=0$ ，解得 $b=1$ ．
(2) 题意即函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的图象存在位于直线 $y=\dfrac{a}{a-1}$ 下方的部分．

由 (1) 知，函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$ ，其导函数

$$f'(x)=\frac{x-1}{x}\cdot[(1-a)x-a],$$

记其中决定 $f'(x)$ 符号的部分为 $h(x)=(1-a)x-a$. 注意到 $h(1)=1-2a$ ，因此按 a 和 $1,\dfrac{1}{2}$ 的大小关系进行讨论.

第一种情况， $a\leqslant\dfrac{1}{2}$. 此时 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，其最小值为 $f(1)=-\dfrac{a+1}{2}$ ，依题意应有

$$-\frac{a+1}{2}<\frac{a}{a-1},$$

解得 $-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$.

第二种情况， $\dfrac{1}{2}<a<1$. 此时 $f(x)$ 在区间 $\left[1,\dfrac{a}{1-a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$ 上单调递增，其最小值为 $f\left(\dfrac{a}{1-a}\right)$ ，依题意应有

$$a\ln\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1}<\frac{a}{a-1},$$

无解.

第三种情况， $a>1$. 此时由第一种情况中的不等式可知， $f(1)<\dfrac{a}{a-1}$ ，因此符合题意.

综上， a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$.

第二章　新课标 II 卷

2.1　分离变量

理科第 12 题．　设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{m}$，若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$，则 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$　　　B. $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

分析　根据题意，有

$$\frac{\pi x_0}{m}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\quad \text{即 } x_0=\left(k+\frac{1}{2}\right)m,$$

进而 $f(x_0)=\pm\sqrt{3}$．

从而可得存在整数 k，使得 $\left[\left(k+\dfrac{1}{2}\right)m\right]^2+(\pm\sqrt{3})^2<m^2$，也即[1]

$$\exists k\in\mathbf{Z},-\frac{3}{m^2}>\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-1,$$

即

$$-\frac{3}{m^2}>\min_{k\in\mathbf{Z}}\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-1\right\}=-\frac{3}{4},$$

解得 $m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$．

解　C

2.2　看圆的“张角”

理科第 16 题/文科第 12 题．　设点 $M(x_0,1)$，若在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle OMN=45^\circ$，则 x_0 的取值范围是[2]________．

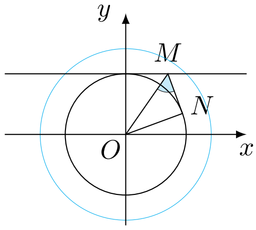
分析　考虑“在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle OMN=45^\circ$”这一条件，其本质即从点 M 处看圆 O 的“张角”[3]不小于 90°．

---

[1] 详见附录『分离变量法』

[2] 文科第 12 题将填空题改为了选择题

[3] 当 M 位于圆外时为过 M 的两条切线所成的角；当 M 位于圆上时为过 M 的切线，即点 M 处的平角；当 M 位于圆内时为点 M 处的周角．



如图，对圆 O 的"张角"为 90° 的点的轨迹为以 O 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆，因此只需要点 M 在该圆内 (包括圆上)，不难求得 x_0 的取值范围是 $[-1,1]$.

解　$[-1,1]$

2.3 追本溯源

文科第 16 题.　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$ ，$a_8=2$ ，则 $a_1=$________.

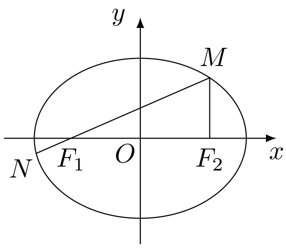
分析　由已知，得 $a_n=1-\dfrac{1}{a_{n+1}}$ ，将 $n=7,6,5,\cdots$ 依次代入，可得

$$a_8=2,a_7=\frac{1}{2},a_6=-1,a_5=2,a_4=\frac{1}{2},a_3=-1,a_2=2,a_1=\frac{1}{2}.$$

解　$\dfrac{1}{2}$

2.4 半通径与焦点弦

理科第 20 题/文科第 20 题.　设 F_1,F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左, 右焦点，M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N .



(1) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$ ，求 C 的离心率;
(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2 ，且 $|MN|=5|F_1N|$ ，求 a,b .

分析　第 (1) 小题主要考查椭圆的方程与基本量，第 (2) 小题考查椭圆的性质，以及简单的比例关系，均属于常规问题.

解　(1) 设 $F_2(c,0)$ ，则半通径 $|MF_2|=\dfrac{b^2}{a}$ ，从而

$$\frac{|MF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{3}{4},$$

将 $b^2=a^2-c^2$，以及 $e=\dfrac{c}{a}$ 代入整理得

$$2e^2+3e-2=0,$$

解得 $e=\dfrac{1}{2}$.

(2) 根据题意 M 点的纵坐标为 MN 在 y 轴上的截距的 2 倍，得 $M(c,4)$. 又 $\left|MN\right|=5\left|F_1N\right|$，从而 $\overrightarrow{F_1M}=-4\overrightarrow{F_1N}$，进而可得 $N\left(-\dfrac{3}{2}c,-1\right)$. 于是由 M,N 点均在椭圆上可得

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1,\frac{9c^2}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1,$$

消去 $\dfrac{c^2}{a^2}$ 可得 $b^2=28$, 即 $b=2\sqrt{7}$. 另一方面，M 的纵坐标为 $\dfrac{b^2}{a}=4$，于是 $a=7$.

因此所求 a,b 的值分别为 $a=7$，$b=2\sqrt{7}$.

2.5　近似估计

理科第 21 题．　已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

(3) 已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 $\ln 2$ 的近似值（精确到 0.001）.

分析　*第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，属于常规问题．第 (2) 小题可以通过分析端点的方式得到 b 的讨论分界点，然后展开讨论即可．第 (3) 小题需要在第 (2) 小题讨论结果的基础上建立合适的不等式得到 $\ln 2$ 的上界和下界．其中突破取 $b=2$ 的思维定势，得到对 $\ln 2$ 的上界的估计是解决问题的关键．*

解　(1)$f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\geqslant 2\cdot\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}-2=0,$$

于是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(2) 根据题意有

$$g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}-4x-4b\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x\right),$$

其导函数

$$g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-2x}-4-4b\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\right),$$

即

$$g'(x)=2\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\right)\cdot\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2-2b\right),$$

设 $h(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2-2b$，则由于 $h(0)=4-2b$，因此按 b 和 2 的大小关系展开讨论.

第一种情况，$b\leqslant 2$. 此时在区间 $(0,+\infty)$ 上，$h(x)\geqslant \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2>0$，于是当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，因此 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，从而 $g(x)>0$，符合题意；

第二种情况，$b>2$．此时在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $h(x)$ 存在零点 $x=\varphi$，其中 φ 是关于 x 的方程

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2-2b=0$$

的根，即 $\varphi=\ln\left(b-1+\sqrt{b^2-2b}\right)$．注意到 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}>0,$$

于是 $h(x)$ 单调递增，因此在区间 $(0,\varphi)$ 上 $h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，因此 $g(x)$ 单调递减，又 $g(0)=0$，从而 $g(x)<0$，不符合题意．

综上，b 的最大值为 2．

(3) 为了估计 $\ln 2$ 的近似值，我们计算

$$g(\ln\sqrt{2})=(4b-2)\ln 2+\frac{3}{2}-2\sqrt{2}b.$$

首先用 $\dfrac{1}{2}<b\leqslant 2$ 的情形估计下界．此时在 $(0,+\infty)$ 上均有 $g(x)>0$，于是有 $g(\ln\sqrt{2})>0$，即

$$\ln 2>\frac{2\sqrt{2}b-\dfrac{3}{2}}{4b-2},$$

注意到不等式右边当 $\dfrac{1}{2}<b\leqslant 2$ 时，最大值在 $b=2$ 处取得，因此

$$\ln 2>\frac{8\sqrt{2}-3}{12}>0.6928.$$

接下来用 $b>2$ 的情形估计上界．此时在 $(0,\varphi]$ 上均有 $g'(x)\leqslant 0$，于是有 $g(x)<0$．取 $\varphi=\ln\sqrt{2}$，则 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+1$，此时可得 $g(\ln\sqrt{2})=g(\varphi)<0$，即

$$\ln 2<\frac{4\sqrt{2}b-3}{4(2b-1)}=\frac{18+\sqrt{2}}{28}<0.6934.$$

综上，$\ln 2$ 的近似值为 0.693．

拓展　事实上，我们对函数 $f(x)=\ln(1+x)$ ($-1<x<1$) 有泰勒展开式:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

因此亦有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

两式相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right),$$

这是估算自然对数的重要公式．

在本题中，取 $x=\dfrac{1}{3}$ 可以很快得到符合精度的近似值

$$2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5\cdot 5}\right)\approx 0.693.$$

2.6　分离变量

文科第 **21** 题.　已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2.

(1) 求 a；

(2) 证明：当 $k<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.

分析 *第 (1) 小题考查利用导函数研究曲线的切线方程，第 (2) 小题考查利用导函数研究函数的零点问题，均属于常规问题.*

解　(1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=3x^2-6x+a,$$

于是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程为 $y=ax+2$. 该直线与 x 轴交于 $(-2,0)$，因此 $a=1$.

(2) 考虑方程 $f(x)=kx-2$，即

$$x^3-3x^2+x+2=kx-2.$$

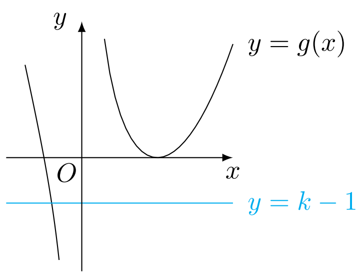
由于 $x=0$ 不是该方程的解，因此只需要考虑 $x\neq 0$ 的情形，此时方程等价于[1]

$$k-1=\frac{x^3-3x^2+4}{x}.$$

令 $g(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x}$，则 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=\frac{2x^3-3x^2-4}{x^2}=\frac{(x-2)(2x^2+x+2)}{x^2},$$

因此当 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=2$ 处取得极小值 $g(2)=0$.



当 $x<0$ 时，$g(x)$ 单调递减，由于 $g(-1)=0$，而当 $-1<x<0$ 时

$$g(x)=x^2-3x+\frac{4}{x}<4+\frac{4}{x},$$

[1]详见附录『分离变量法』

因此 $g\left(\dfrac{4}{k-5}\right)<k-1$，于是当 $x<0$ 时，直线 $y=k-1$ 与函数 $g(x)$ 的图象有唯一公共点，且交点横坐标在区间 $\left(-1,\dfrac{4}{k-5}\right)$ 上.
当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant 0$，此时直线 $y=k-1$ 与函数 $g(x)$ 的图象没有公共点.
因此直线 $y=k-1$ 与函数 $g(x)$ 的图象有且只有一个公共点，原命题得证.

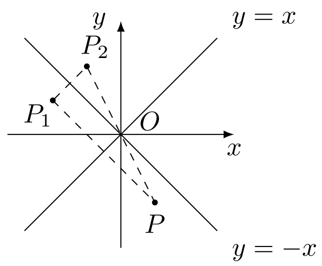
第三章　全国大纲卷

3.1　两次对称

理科第 12 题．　函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象与函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，则 $y=f\left(x\right)$ 的反函数是 (　　)

A. $y=g\left(x\right)$　　B. $y=g\left(-x\right)$　　C. $y=-g\left(x\right)$　　D. $y=-g\left(-x\right)$

分析 设函数 $y=f(x)$ 的反函数图象上任意一点 $P(x_0,y_0)$，点 P 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P_1(y_0,x_0)$ 且 P_1 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，而点 P_1 关于直线 $x+y=0$ 的对称点为 $P_2(-x_0,-y_0)$ 且 P_2 在函数 $y=g(x)$ 的图象上，因此 $-y_0=g(-x_0)$，即 $y_0=-g(-x_0)$，因此 $y=-g(-x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.



解　D

3.2　双对称函数

文科第 12 题．　奇函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．若函数 $f\left(x+2\right)$ 为偶函数，且 $f\left(1\right)=1$，则 $f\left(8\right)+f\left(9\right)=$ (
)

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

分析 函数 $f(x)$ 为奇函数，因此函数 $f(x)$ 满足：当自变量互为相反数时，函数值也互为相反数；函数 $f(x+2)$ 为偶函数，因此 $f(x+2)=f(-x+2)$，即函数 $f(x)$ 满足：当自变量的和为 4 时，函数值相等. 因此

$$f(x)=f(-x+4)=-f(x-4)=-f(-x+8)=f(x-8),$$

从而函数 $f(x)$ 是周期为 8 的函数，进而

$$f(8)+f(9)=f(0)+f(1)=1.$$

解　D

拓展　若函数 $f(x)$ 的图象同时关于直线 $x=a$ 和直线 $x=b$ 对称，其中 $a\neq b$，则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的函数；
若函数 $f(x)$ 的图象同时关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称，其中 $a\neq b$，则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的函数；
若函数 $f(x)$ 的图象同时关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)$ 对称，其中 $a\neq b$，则 $f(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的函数.

3.3 复合函数

理科第 16 题.　若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是减函数，则 a 的取值范围是________.

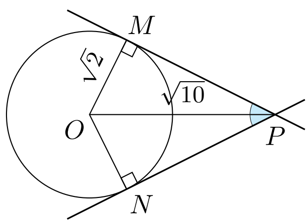
分析 函数 $f(x)$ 即 $f(x)=-2\sin^2 x+a\sin x+1$，可以看作是函数 $y=-2t^2+at+1$ 与函数 $t=\sin x$ 的复合函数.
因为函数 $t=\sin x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又函数 $y=f(x)$ 在此区间上单调递减，因此函数 $y=-2t^2+at+1$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，从而对称轴 $t=\dfrac{a}{4}\leqslant\dfrac{1}{2}$，解得 $a\leqslant 2$.

解　$(-\infty,2]$

3.4 看圆的“张角”

文科第 16 题.　直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$，则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于________.

分析 设 l_1 与 l_2 的夹角为 θ，则 θ 只和圆心到交点 $P(1,3)$ 的距离以及半径有关，如图.



设切点为 M,N，在直角三角形 OPM 中易得

$$\tan\frac{\theta}{2}=\tan\angle OPM=\frac{OM}{PM}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10-2}}=\frac{1}{2},$$

因此

$$\tan\theta=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{4}{3}.$$

解 $\dfrac{4}{3}$

3.5 抛物线遇上圆

理科第 21 题/文科第 22 题. 已知抛物线 $C: y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与 C 的交点为 Q，且 $|QF|=\dfrac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点，且 A、M、B、N 四点在同一圆上，求 l 的方程.

分析 *第 (1) 小题考查抛物线的定义与方程，属于常规问题. 第 (2) 小题中如何简洁的表达“A、M、B、N 四点在同一圆上”这一关键条件是解决问题的重难点所在. 事实上，选择利用直线的参数方程，通过相交弦定理来表达共圆就可以轻松化解这一难题，并且可以用此方法得到更加一般的结论.*

解 (1) 根据题意，有点 Q 的坐标为 $\left(\dfrac{8}{p},4\right)$，根据抛物线的定义，有 $|QF|=x_Q+\dfrac{p}{2}$，从而

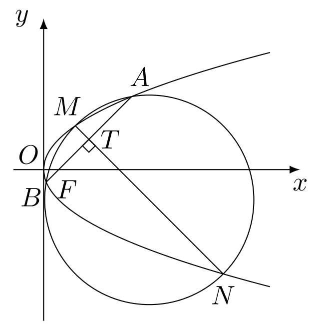
$$\frac{8}{p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{p},$$

解得 $p=2$，因此抛物线 C 的方程为 $C: y^2=4x$.

(2) 设直线 MN 与直线 AB 相交于点 $T(x_0,y_0)$，且

$$\text{直线 } AB: \begin{cases} x=x_0+t, \\ y=y_0+k_1t, \end{cases} \qquad \text{直线 } MN: \begin{cases} x=x_0+t, \\ y=y_0+k_2t, \end{cases}$$

其中 t 为参数，且 A,B,M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2,t_3,t_4，如图.



将直线 AB 与抛物线 $C: y^2=4x$ 联立，有

$$(k_1t+y_0)^2=4(t+x_0),$$

即

$$k_1t^2+(2k_1y_0-4)t+y_0^2-4x_0=0,$$

因此

$$|TA|\cdot|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\,|t_1|\cdot\sqrt{1+k_1^2}\,|t_2|=(1+k_1^2)\cdot\frac{\left|y_0^2-4x_0\right|}{k_1^2},$$

类似地，有

$$|TM|\cdot|TN|=(1+k_2^2)\cdot\frac{\left|y_0^2-4x_0\right|}{k_2^2},$$

从而由相交弦定理，有 $|TA|\cdot|TB|=|TM|\cdot|TN|$ ，因此

$$(1+k_1^2)\cdot\frac{\left|y_0^2-4x_0\right|}{k_1^2}=(1+k_2^2)\cdot\frac{\left|y_0^2-4x_0\right|}{k_2^2},$$

于是 $k_1=-k_2$.

又直线 AB 与直线 MN 垂直，因此 $k_1\cdot k_2=-1$ ，因此可得 $k_1=\pm1$ ，从而直线 l 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$.

拓展　一般地，在对称轴与坐标轴平行或垂直的非圆的二次曲线上取四点 P,Q,M,N ，且直线 PQ 与直线 MN 的斜率均存在，那么 P,Q,M,N 四点共圆的充要条件是直线 PQ 与直线 MN 的斜率互为相反数．该命题也可以利用非圆二次曲线 $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ ($A\neq B$) 与两条相交直线 $(y-k_1x-b_1)\cdot(y-k_2x-b_2)=0$ ($k_1\neq k_2$) 形成的交点曲线系

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F-\lambda\cdot(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)=0$$

证明．

3.6　平铺直叙

理科第 22 题．　函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+a}$ $(a>1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

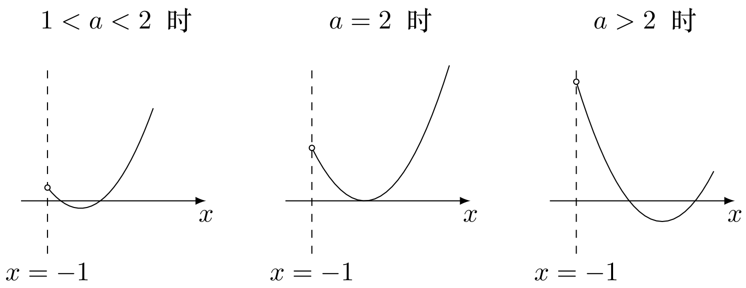
(2) 设 $a_1=1$ ， $a_{n+1}=\ln(a_n+1)$ ，证明： $\dfrac{2}{n+2}<a_n\leqslant\dfrac{3}{n+2}$.

分析　第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，属于常规问题．第 (2) 小题需要证明一个数列不等式，由于已经给定递推公式，因此可以尝试使用数学归纳法证明．不难通过分析得知递推证明所用到的不等式可以由第 (1) 小题的结果得出．

解　(1) 根据题意，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{x^2+(2a-a^2)x}{(x+1)(x+a)^2},$$

令 $g(x)=x^2+(2a-a^2)x$ ，则由于 $g(-1)=(a-1)^2>0$ ，对称轴 $x=\dfrac{a^2-2a}{2}>-1$ ，判别式 $\Delta=a^2(2-a)^2$ ，因此按 a 与 2 的大小关系进行讨论．



第一种情况，当 $1<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,a^2-2a)$ 上单调递增，在 $(a^2-2a,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

第二种情况，当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

第三种情况，当 $a>2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,a^2-2a)$ 上单调递减，在 $(a^2-2a,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 用数学归纳法证明如下.

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，因此 $\dfrac{2}{3}<1\leqslant 1$，命题成立；

假设当 $n=k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时命题成立，即 $\dfrac{2}{k+2}<a_k\leqslant\dfrac{3}{k+2}$，则考虑当 $n=k+1$ 时，有 $a_{k+1}=\ln(a_k+1)$，从而

$$\ln\left(\frac{2}{k+2}+1\right)<a_{k+1}\leqslant\ln\left(\frac{3}{k+2}+1\right),$$

因此只需要证明

$$\ln\left(\frac{2}{k+2}+1\right)\geqslant\frac{2}{k+3},\ln\left(\frac{3}{k+2}+1\right)\leqslant\frac{3}{k+3}.$$

根据第 (1) 小题的结论，当 $a=2$ 时，有 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，因此 $f(x)>f(0)=0$，即

$$\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2},$$

令 $x=\dfrac{2}{k+2}$，即得

$$\ln\left(\frac{2}{k+2}+1\right)>\frac{2}{k+3};$$

当 $a=3$ 时，有 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，因此 $f(x)<f(0)=0$，即

$$\ln(x+1)<\frac{3x}{x+3},$$

令 $x=\dfrac{3}{k+2}$，即得

$$\ln\left(\frac{3}{k+2}+1\right)<\frac{3}{k+3};$$

综上所述，命题当 $n=k+1$ 时也成立.

因此原命题得证.

3.7 分离讨论和分离变量

文科第 **21** 题． 函数 $f(x)=ax^3+3x^2+3x\ (a\neq 0)$．
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 是增函数，求 a 的取值范围．

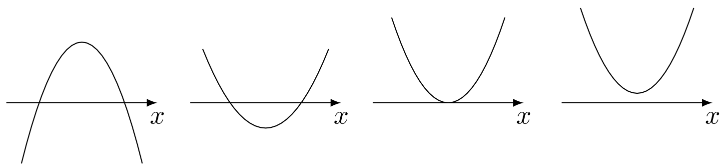
分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，第 (2) 小题是利用导函数研究函数的单调性问题的反向问题，都属于常规问题．

解 (1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=3(ax^2+2x+1),$$

设函数 $h(x)=ax^2+2x+1$，则其对称轴为 $x=-\dfrac{1}{a}$，判别式 $\Delta=4(1-a)$，因此按 a 与 $0,1$ 的大小关系展开讨论．

$a<0$ 时 $0<a<1$ 时 $a=1$ 时 $a>1$ 时



第一种情况，$a<0$．

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a},\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

第二种情况，$0<a<1$．

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a},\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递增；

第三种情况，$a\geqslant 1$．函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．

(2) 题意即对任意 $x\in(1,2)$，均有 $3(ax^2+2x+1)\geqslant 0$，即[1]

$$\forall x\in(1,2),a\geqslant -\frac{2x+1}{x^2},$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，则问题等价于

$$\forall t\in\left(\frac{1}{2},1\right),a\geqslant -t^2-2t,$$

[1]详见附录『分离变量法』

由于函数 $y=-t^2-2t$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上的取值范围是 $\left(-3,-\frac{5}{4}\right)$，因此 a 的取值范围是 $\left[-\frac{5}{4},0\right)\cup(0,+\infty)$．

第四章　安徽卷

4.1　环环相扣

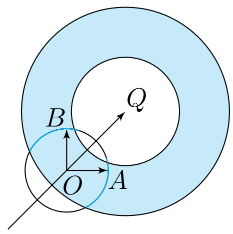
理科第 10 题．　在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\vec{a},\vec{b}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$．曲线 $C=\left\{P\mid\overrightarrow{OP}=\vec{a}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta,0\leqslant\theta<2\pi\right\}$，区域 $\Omega=\left\{P\mid 0<r\leqslant\left|\overrightarrow{PQ}\right|\leqslant R,r<R\right\}$．若 $C\cap\Omega$ 为两段分离的曲线，则（　　）

A. $1<r<R<3$　　B. $1<r<3\leqslant R$

C. $r\leqslant 1<R<3$　　D. $1<r<3<R$

分析　整个问题的条件和结论都与相对位置有关，和绝对位置无关，因此可以忽略平面直角坐标系 xOy 这一束缚．

如图，长度均为 1 的有向线段 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，分别代表 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$．易得 $\overrightarrow{OQ}$ 在 $\angle AOB$ 的平分线上，与 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角均为 45°，且 $|OQ|=2$．



对于曲线 C，注意到 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 上的有向投影分别为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$，因此曲线 C（即 P 点的轨迹）是以 O 为圆心，1 为半径的圆（且 θ 为以 $\overrightarrow{OA}$ 为始边，$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角），记为圆 O．

对于区域 Ω，容易得到它表示以 Q 为圆心，外圆半径为 R，内圆半径为 r 的圆环内部（包括内外边界）．

于是 $C\cap\Omega$ 表示圆 O 被 Ω 表示的圆环所截的部分，为了保证它为两段分离的曲线，需要圆环的内圆和外圆均与圆 O 相交，因此 $1<r<R<3$．

解　A

4.2　随机组合

理科第 15 题．　已知两个不相等的非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，两组向量 $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\vec{x}_3$，$\vec{x}_4$，$\vec{x}_5$ 和 $\vec{y}_1$，$\vec{y}_2$，$\vec{y}_3$，$\vec{y}_4$，$\vec{y}_5$ 均由 2 个 $\vec{a}$ 和 3 个 $\vec{b}$ 排列而成．记 $S=\vec{x}_1\cdot\vec{y}_1+\vec{x}_2\cdot\vec{y}_2+\vec{x}_3\cdot\vec{y}_3+\vec{x}_4\cdot\vec{y}_4+\vec{x}_5\cdot\vec{y}_5$，$S_{\min}$ 表示 S 所有可能取值中的最小值．则下列命题正确的是________（写出所有正确命题的编号）．

① S 有 5 个不同的值；

②若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $S_{\min}$ 与 $\left|\vec{a}\right|$ 无关；
③若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $S_{\min}$ 与 $\left|\vec{b}\right|$ 无关；
④若 $\left|\vec{b}\right|>4\left|\vec{a}\right|$，则 $S_{\min}>0$；
⑤若 $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，$S_{\min}=8\left|\vec{a}\right|^2$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

分析 记 $\left|\vec{a}\right|=m$，$\left|\vec{b}\right|=n$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，按照计算 S 的过程中 $\vec{a}\cdot\vec{a}$ 出现的个数分为 3 类：
第一类，2 个 $\vec{a}\cdot\vec{a}$，此时 $S=2m^2+3n^2$；
第二类，1 个 $\vec{a}\cdot\vec{a}$，此时 $S=m^2+2n^2+2mn\cos\theta$；
第三类，0 个 $\vec{a}\cdot\vec{a}$，此时 $S=n^2+4mn\cos\theta$.
于是 ① 错误，事实上 S 最多只有 3 个不同取值；
注意到
$$m^2+n^2\geqslant 2mn\geqslant 2mn\cos\theta,$$
等号当且仅当 $m=n$ 且 $\theta=0$ 时，也即 $\vec{a}=\vec{b}$ 时取得，与题意不符．这样就有 $m^2+n^2>2mn\cos\theta$，进而
$$2m^2+3n^2>m^2+2n^2+2mn\cos\theta>n^2+4mn\cos\theta,$$
因此 S 有 3 个不同的取值，且 $S_{\min}=n^2+4mn\cos\theta$.
②正确，$S_{\min}=n^2$，与 $\vec{a}$ 的长度无关；
③错误，$S_{\min}=n^2+4mn\cos\theta$，与 $\vec{b}$ 的长度有关；
④正确，$S_{\min}=n^2+4mn\cos\theta\geqslant n^2-4mn=n(n-4m)>0$；
⑤错误，$S_{\min}=4m^2+8m^2\cos\theta=8m^2$，于是 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

解 ②④

文科第 10 题． 设 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，$\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，两组向量 $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\vec{x}_3$，$\vec{x}_4$ 和 $\vec{y}_1$，$\vec{y}_2$，$\vec{y}_3$，$\vec{y}_4$ 均由 2 个 $\vec{a}$ 和 2 个 $\vec{b}$ 排列而成，若 $\vec{x}_1\cdot\vec{y}_1+\vec{x}_2\cdot\vec{y}_2+\vec{x}_3\cdot\vec{y}_3+\vec{x}_4\cdot\vec{y}_4$ 所有可能取值中的最小值为 $4\left|\vec{a}\right|^2$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 (　　)

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. 0

分析 与理科第 15 题类似．记 $\left|\vec{a}\right|=m$，$\left|\vec{b}\right|=2m$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ．设题中计算的和式为 S，按照计算 S 的过程中 $\vec{a}\cdot\vec{a}$ 出现的个数分为 3 类：
第一类，2 个 $\vec{a}\cdot\vec{a}$，此时 $S=10m^2$；
第二类，1 个 $\vec{a}\cdot\vec{a}$，此时 $S=5m^2+4m^2\cos\theta$；
第三类，0 个 $\vec{a}\cdot\vec{a}$，此时 $S=8m^2\cos\theta$.
因此 $8m^2\cos\theta$ 是 S 的所有可能取值中的最小值，因此 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，进而 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

解 B

4.3　“切过”

文科第 15 题.　若直线 l 与曲线 C 满足下列两个条件:

(i) 直线 l 在点 $P(x_0,y_0)$ 处与曲线 C 相切; (ii) 曲线 C 在点 P 附近位于直线 l 的两侧，则称直线 l 在点 P 处“切过”曲线 C . 下列命题正确的是________. (写出所有正确命题的编号)

①直线 $l:y=0$ 在点 $P(0,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=x^3$;

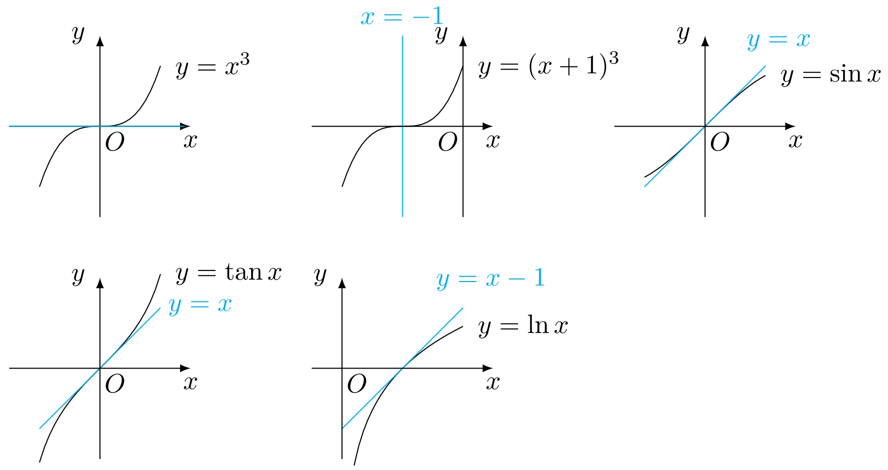
②直线 $l:x=-1$ 在点 $P(-1,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=(x+1)^3$;

③直线 $l:y=x$ 在点 $P(0,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=\sin x$;

④直线 $l:y=x$ 在点 $P(0,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=\tan x$;

⑤直线 $l:y=x-1$ 在点 $P(1,0)$ 处“切过”曲线 $C:y=\ln x$.

分析　直接作图，注意比较在 x_0 附近函数图象与切线的位置关系即可.



注意分析奇偶性 (奇函数在原点处的切线一定“切过”函数图象) 可以更快的得到结论，另外直线 $y=x$ 是函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=\tan x$ 在原点处的公切线，这也是我们熟悉的结论.

解　①③④

拓展　设曲线 $C:y=f(x)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，则在 $x=x_0$ 处曲线 C 的切线为

$$l:y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),$$

令 $h(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)$ ，若直线 l 在 P 处“切过”曲线 C ，即 $x=x_0$ 是函数 $h(x)$ 的变号零点.

显然，判断是否满足条件 (i) 的标准是 $h(x_0)=h'(x_0)=0$. 接下来研究判断是否满足条件 (ii) 的标准.

设 $h^{(n)}(x)$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 表示函数 $h(x)$ 的 n 阶导函数，并记 $h^{(0)}(x)=h(x)$.

若 $h^{(n)}(x)$ 在 x_0 的小邻域内满足保号性，那么 $h^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 的小邻域内单调. 于是 $x=x_0$ 是 $h^{(n-1)}(x)$ 的变号零点，这样就有 $x=x_0$ 是函数 $h^{(n-2)}(x)$ 的极值点，进而 $h^{(n-2)}(x)$ 在 x_0 的小邻域内保号. 也就是:

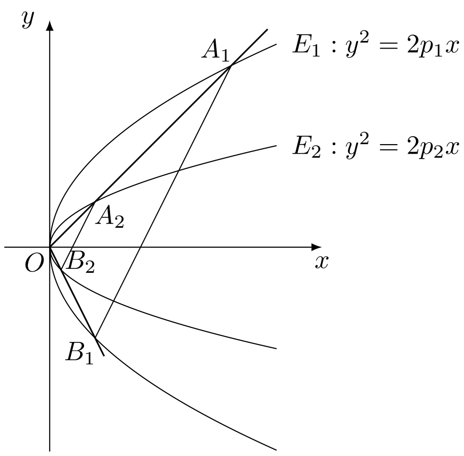
保号 (不变号) $\to$ 单调 (变号零点) $\to$ 保号 (不变号) $\to$ 单调 (变号零点) $\to\cdots$

这个推理过程可以递推下去. 这样就可以得到判断是否满足条件 (ii) 的标准: 若存在最大自然数 n 使得函数 $h^{(n)}(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值为零, 则定义 $n=N(h,x_0)$, 则当 $N(h,x_0)$ 为偶数时, $x=x_0$ 是函数 $h(x)$ 的变号零点, 而当 $N(h,x_0)$ 为奇数时, $x=x_0$ 不是函数 $h(x)$ 的变号零点.

把两个判断标准结合起来,就得到了判断直线 l 是否在 $x=x_0$ 处"切过"曲线 C 的充要条件: $N(h,x_0)$ 为不小于 2 的偶数. 例如, 对 ①, $N(x^3,0)=2$, 因此直线 $y=0$ "切过"曲线 $y=x^3$; 而对 ⑤, $N(\ln x-(x-1),1)=1$, 因此直线 $y=x-1$ 不"切过"曲线 $y=\ln x$.

4.4 相似的抛物线

理科第 19 题. 如图, 已知两条抛物线 $E_1: y^2=2p_1x\,(\,p_1>0\,)$ 和 $E_2: y^2=2p_2x\,(\,p_2>0\,)$, 过原点 O 的两条直线 l_1 和 l_2, l_1 与 E_1,E_2 分别交于 A_1,A_2 两点, l_2 与 E_1,E_2 分别交于 B_1,B_2 两点.



(1) 证明: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$;

(2) 过 O 作直线 l (异于 l_1,l_2) 与 E_1,E_2 分别交于 C_1,C_2 两点. 记 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积分别为 S_1 与 S_2, 求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值.

分析 *第 (1) 小题中核心条件是 A_1,A_2,O 三点共线以及 B_1,B_2,O 三点共线, 考虑到抛物线上的点的坐标容易用单参数表达, 因此直接设点的坐标绕开直线与抛物线方程的联立可以简化运算. 利用好第 (1) 小题中的结论, 可以将第 (2) 小题中三角形的面积比转化为非常简单的相似比计算.*

解 (1) 设 $A_1(2p_1t_1^2,2p_1t_1)$, $B_1(2p_1t_2^2,2p_1t_2)$, $A_2(2p_2t_3^2,2p_2t_3)$, $B_2(2p_2t_4^2,2p_2t_4)$.

由 A_1,A_2,O 三点共线, 有直线 OA_1 与直线 OA_2 的斜率相等, 从而 $t_1=t_3$; 类似的, 由 B_1,B_2,O 三点共线, 可得 $t_2=t_4$.

当 $t_1+t_2\neq 0$ 时, 直线 A_1B_1 的斜率为

$$\frac{2p_1t_1-2p_1t_2}{2p_1t_1^2-2p_1t_2^2}=\frac{1}{t_1+t_2},$$

同理可得直线 A_2B_2 的斜率为 $\dfrac{1}{t_3+t_4}$, 因此 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

当 $t_1+t_2=0$ 时, $t_3+t_4=0$, 因此直线 A_1B_1 与直线 A_2B_2 均垂直于 x 轴, 此时仍有 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

综上, 原命题得证.

(2) 由第 (1) 小题的结论可知，$\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三边分别平行，因此三个内角对应相等，于是 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 相似，其面积比 $\dfrac{S_1}{S_2}=\left(\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}\right)^2$，又 $\triangle OA_1B_1$ 与 $\triangle OA_2B_2$ 相似，因此

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{2p_1t_1}{2p_2t_3}=\frac{p_1}{p_2},$$

这样我们就有 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{p_1^2}{p_2^2}$.

拓展　在平面直角坐标系中，如果曲线 C_1 经过平移、旋转、对称和 x、y 轴方向等比例的伸缩可以与曲线 C_2 重合，那么就说这两条曲线是相似的．其中平移、旋转和对称都是等积变换，而对于伸缩变换 $\begin{cases}x'=kx,\\ y'=ky,\end{cases}$ 其面积比 $\dfrac{S'}{S}=k^2$．于是，抛物线 $y^2=2px$ 可以通过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\dfrac{p'}{p}x,\\ y'=\dfrac{p'}{p}y\end{cases}$ 变为 $y'^2=2p'x'$．因此所有抛物线都是相似的，表征其大小的量就是焦准距 p.

4.5　归纳复归纳

理科第 **21** 题．　设实数 $c>0$，整数 $p>1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明：当 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时，$(1+x)^p>1+px$；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>c^{\frac{1}{p}}$，$a_{n+1}=\dfrac{p-1}{p}a_n+\dfrac{c}{p}a_n^{1-p}$，证明：$a_n>a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$.

分析　*第 (1) 小题即证明伯努利不等式；第 (2) 小题可以先分析 $a_{n+1}-a_n$ 得到只需要证明 $a_n>c^{\frac{1}{p}}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)，然后在第 (1) 小题的提示下利用 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 得到关键性的递推证明即可．*

解　(1) 用数学归纳法证明，对 p 进行归纳．

当 $p=2$ 时，命题显然成立；

若命题对 $p=k$ ($k\geqslant 2$ 且 $k\in\mathbf{N}$) 成立，则当 $p=k+1$ 时，有

$$(1+x)^{k+1}>(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(1+k)x$$

于是命题对 $p=k+1$ 也成立，从而原命题得证．

(2) 首先用数学归纳法证明 $a_n>c^{\frac{1}{p}}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)，对 n 进行归纳．

当 $n=1$ 时，命题显然成立；

假设当 $n=k$ ($k\in\mathbf{N}^*$) 时，有 $a_k>c^{\frac{1}{p}}$，则当 $n=k+1$ 时，由

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=1+\frac{1}{p}\left(\frac{c}{a_k^p}-1\right)$$

应用第 (1) 小题的结论得

$$\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^p>1+p\cdot\frac{1}{p}\left(\frac{c}{a_k^p}-1\right)=\frac{c}{a_k^p},$$

于是有 $a_{k+1} > c^{\frac{1}{p}}$.
综上，命题 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 得证.
在 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的基础上有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{p-1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p} - a_n = -\frac{1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p} = \frac{1}{p}a_n\left(\frac{c}{a_n^p} - 1\right) < 0,$$

因此原命题得证.

拓展　也可以利用均值不等式进行 $a_n > c^{\frac{1}{p}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的递推证明:

$$\frac{1}{p}\left(\underbrace{a_n + a_n + \cdots + a_n}_{p-1\text{ 个}} + \frac{c}{a_n^{p-1}}\right) > c^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\frac{p-1}{p}a_n + \frac{c}{p}a_n^{1-p} > c^{\frac{1}{p}},$$

因此 $a_{n+1} > c^{\frac{1}{p}}$.

4.6　度长絜大

文科第 **20** 题.　设函数 $f(x) = 1 + (1+a)x - x^2 - x^3$ ，其中 $a > 0$.
(1) 讨论 $f(x)$ 在其定义域上的单调性;
(2) 当 $x \in [0,1]$ 时，求 $f(x)$ 取得最大值和最小值时的 x 的值.

分析　*第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，第 (2) 小题考查利用导函数研究函数在闭区间上的最值，均属于常规问题.*

解　(1) $f(x)$ 的导函数

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 + a,$$

其判别式 $\Delta = 12a+16 > 0$,于是函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}, \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}, +\infty\right)$ 上单调递减.
(2) 注意到 $f(0) = 1$ ，$f(1) = a$ ，而 $f'(0) = a+1$ ，$f'(1) = a-4$ ，因此按 a 和 $1,4$ 的大小关系展开讨论.
第一种情形，$0 < a < 1$. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上先单调递增，再单调递减，因此最大值在 $x = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$ 处取得，最小值在 $x = 1$ 处取得;
第二种情形，$a = 1$. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上先单调递增，再单调递减，因此最大值在 $x = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$ 处取得，最小值在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处取得;
第三种情形，$1 < a < 4$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上先单调递增，再单调递减，因此最大值为 $x = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$ 处取得，最小值在 $x = 0$ 处取得;

第四种情形， $a \geqslant 4$ ，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因此最大值在 $x=1$ 处取得，最小值在 $x=0$ 处取得.

4.7　第一定义

文科第 **21** 题.　设 F_1 ， F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A ， B 两点， $\left|AF_1\right|=3\left|BF_1\right|$.
(1) 若 $|AB|=4$ ， $\triangle ABF_2$ 的周长为 16 ，求 $|AF_2|$;
(2) 若 $\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$ ，求椭圆 E 的离心率.

分析 *第 (1) 小题考查椭圆的定义，第 (2) 小题进一步结合解三角形考查椭圆的定义，都属于常规问题.*

解　(1) 根据已知条件， $\triangle ABF_2$ 的周长为长轴长的两倍，于是 $2a=8$ ，从而

$$\left|AF_2\right|=2a-\left|AF_1\right|=8-3=5.$$

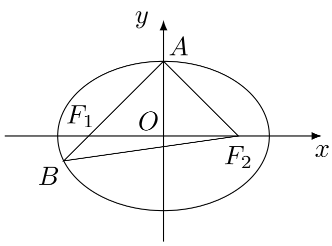
(2) 设 $\left|BF_1\right|=m$ ， $\left|AF_1\right|=3m$ ，则 $\left|AF_2\right|=2a-3m$ ， $\left|BF_2\right|=2a-m$.
在 $\triangle AF_2B$ 中应用余弦定理，得

$$\left|AB\right|^2=\left|AF_2\right|^2+\left|BF_2\right|^2-2\left|AF_2\right|\cdot\left|BF_2\right|\cdot\cos\angle AF_2B,$$

即

$$(4m)^2=(2a-3m)^2+(2a-m)^2-2(2a-3m)(2a-m)\cdot\frac{3}{5},$$

解得 $a=3m$.



于是 $\left|AF_1\right|=\left|AF_2\right|=3m$ ，因此 $\triangle AF_1F_2$ 为等腰直角三角形，进而离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

第五章　北京卷

5.1　势均力敌

理科第 8 题　学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级，依次为“优秀”、“合格”、“不合格”. 若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙，且其中至少有一门成绩高于乙，则称“学生甲比学生乙成绩好”. 如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好，并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生，那么这组学生最多有 (　　)

A. 2 人　　B. 3 人　　C. 4 人　　D. 5 人

分析　将三个等级“优秀”、“合格”、“不合格”分别用 A、B、C 代替，用 AB 来表示语文成绩为“优秀”，数学成绩为“合格”，那么所有可能的成绩为

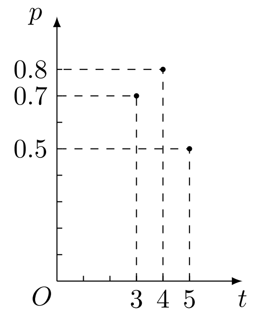
$$\begin{matrix} AA & AB & AC \\ BA & BB & BC \\ CA & CB & CC \end{matrix}$$

根据题意，每行和每列都至多选取一个作为某个学生的成绩，因此这一组学生不能多于 3 人. 又当选择 $\{AC, BB, CA\}$ 作为学生成绩时符合题意，因此这一组学生最多有 3 人.

解　B

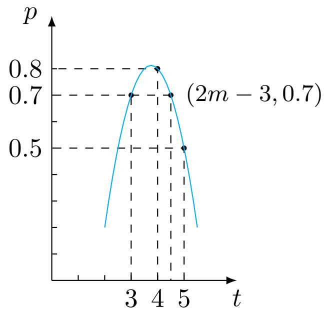
5.2　爆米花

文科第 8 题.　加工爆米花时，爆开且不糊的粒数占加工总粒数的百分比称为“可食用率”. 在特定条件下，可食用率 p 与加工时间 t(单位：分钟) 满足函数关系 $p = at^2 + bt + c$ (a, b, c 是常数)，下图记录了三次实验的数据. 根据上述函数模型和实验数据，可以得到最佳加工时间为 (　　)



A. 3.50 分钟　　B. 3.75 分钟　　C. 4.00 分钟　　D. 4.25 分钟

分析 题意即求函数 $p(t)$ 的对称轴位置，设其对称轴为 $t=m$. 根据图象可以判断 m 在 4 附近，且由于 $0.5<0.7$ ，因此 m 比 4 略小，进而将点 $(3,0.7)$ 对称到单调递减区间 $[4,5]$ 上，可得 $4<2m-3<5$ ，即 $3.5<m<4$ ，因此选项 B 正确．



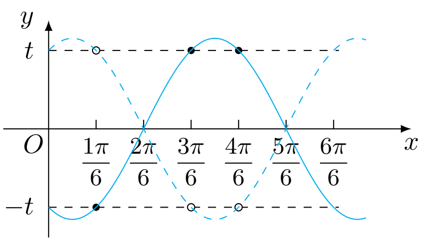
事实上，函数 $p(t)$ 的解析式为 $p(t)=-0.2t^2+1.5t-2$.

解　B

5.3　以形驭数

理科第 14 题．　设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A,ω,φ 是常数，$A>0$ ，$\omega>0$)．若 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为________．

分析 函数 $f(x)$ 的图象经过三个实心点 (或空心点)，结合 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调，因此 $x=\dfrac{2\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的零点．又 $f\left(\dfrac{3\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{4\pi}{6}\right)$ ，因此 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴，如图．



于是 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{2\pi}{6}$ ，从而 $T=\pi$.

解　π

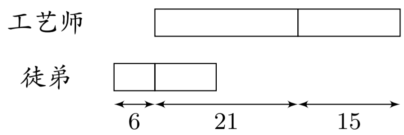
5.4　爱日惜力

文科第 14 题．　顾客请一位工艺师把 A ，B 两件玉石原料各制成一件工艺品，工艺师带一位徒弟完成这项任务，每件原料先由徒弟完成粗加工，再由工艺师进行精加工完成制作，两件工艺品都完成后交付顾客，两件原料每道工序所需时间 (单位：工作日) 如下：

时间　工序　原料	粗加工	精加工
原料 A	9	15
原料 B	6	21

则最短交货期为________ 个工作日.

分析 工艺师和徒弟同时工作的时间最长为徒弟粗加工原料 A 的时间，此时最短交货期为 $6+21+15=42$ 个工作日，如图.



解　42

5.5　单刀直入

理科第 19 题.　已知椭圆 $C: x^2+2y^2=4$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

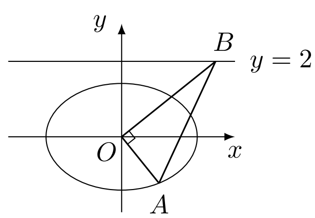
(2) 设 O 为原点，若点 A 在椭圆 C 上，点 B 在直线 $y=2$ 上，且 $OA \perp OB$ ，试判断直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系，并证明你的结论.

分析 第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，属于送分题；第 (2) 小题中如何简洁明了的表达关键条件 $OA \perp OB$ 是解决问题的核心，借用极坐标引入角度作为参数可以很方便的解决问题.

解　(1) 根据题意，椭圆的长半轴长 $a=2$ ，短半轴长 $b=\sqrt{2}$ ，因此半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$ ，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 设 $|OA|=r_1$ ， $|OB|=r_2$ ，点 A 的坐标为 $A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$ ，其中 θ 表示以 Ox 为始边，OA 为终边的最小正角.

由 $OA \perp OB$ 可得点 B 的坐标为 $B\left(r_2\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right), r_2\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.



由点 A 在椭圆上，点 B 在直线 $y=2$ 上，可得

$$r_1^2\cos^2\theta+2r_1^2\sin^2\theta=4, r_2\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=2,$$

因此点 O 到直线 AB 的距离 d 满足

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}{4}+\frac{\cos^2\theta}{4}=\frac{1}{2},$$

即 $d=\sqrt{2}$. 因此直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切.

文科第 19 题. 已知椭圆 $C:x^2+2y^2=4$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 设 O 为原点, 若点 A 在椭圆上, 点 B 在直线 $y=2$ 上[1], 且 $OA\perp OB$, 求线段 AB 长度的最小值.

分析 *与理科第 19 题类似, 参见理科第 19 题的分析.*

解 (1) 根据题意, 椭圆的长半轴长 $a=2$, 短半轴长 $b=\sqrt{2}$, 因此半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$, 离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

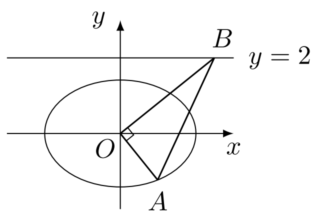
(2) 直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切. 设 $B(t,2)$, $A(x_0,y_0)$, 则 $OA:y=-\dfrac{t}{2}x$, 与椭圆方程联立可得

$$x_0^2=\frac{8}{t^2+2},$$

因此

$$\begin{aligned}|AB|^2&=|OA|^2+|OB|^2\\&=\left[1+\left(-\frac{t}{2}\right)^2\right]\cdot x_0^2+t^2+4\\&=t^2+6+\frac{4}{t^2+2}\geqslant 8,\end{aligned}$$

等号当且仅当 $t=0$ 时取得. 因此 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.



拓展 沿用理科第 19 题的思路, 对应的解法如下:

设 $|OA|=r_1$, $|OB|=r_2$, 点 A 的坐标为 $A(r_1\cos\theta,r_1\sin\theta)$, 其中 θ 表示以 Ox 为始边, OA 为终边的最小正角.

由 $OA\perp OB$ 可得点 B 的坐标为 $B\left(r_2\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right),r_2\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. 由点 A 在椭圆上, 点 B 在直线 $y=2$ 上, 可得

$$r_1^2\cos^2\theta+2r_1^2\sin^2\theta=4,r_2\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=2,$$

[1]为了和理科第 19 题保持一致, 交换了 A 点与 B 点的位置

因此

$$\begin{aligned}|AB|^2&=r_1^2+r_2^2\\&=\frac{4}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}+\frac{4}{\cos^2\theta}\\&=\left(\frac{2}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}+\frac{2}{\cos^2\theta}\right)\cdot\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\\&=4+\frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}+\frac{2\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)}{\cos^2\theta}\\&\geqslant 8,\end{aligned}$$

等号当 $\sin\theta=0$ 时取得．因此线段 AB 长度的最小值为 $2\sqrt{2}$ ．

5.6　逐步调整

理科第 **20** 题．　对于数对序列 $P:(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ ，记 $T_1(P)=a_1+b_1$ ，

$$T_k(P)=b_k+\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}\,(2\leqslant k\leqslant n),$$

其中 $\max\{T_{k-1}(P),a_1+a_2+\cdots+a_k\}$ 表示 $T_{k-1}(P)$ 和 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 两个数中最大的数．
(1) 对于数对序列 $P:(2,5)$ ，$(4,1)$ ，求 $T_1(P)$ ，$T_2(P)$ 的值；
(2) 记 m 为 a,b,c,d 四个数中最小的数，对于由两个数对 (a,b) ，(c,d) 组成的数对序列 $P:(a,b)$ ，(c,d) 和 $P':(c,d)$ ，(a,b) ，试分别对 $m=a$ 和 $m=d$ 两种情况比较 $T_2(P)$ 和 $T_2(P')$ 的大小；
(3) 在由 5 个数对 $(11,8)$ ，$(5,2)$ ，$(16,11)$ ，$(11,11)$ ，$(4,6)$ 组成的所有数对序列中，写出一个数对序列 P 使 $T_5(P)$ 最小，并写出 $T_5(P)$ 的值．(只需写出结论)

分析 *解决问题的关键在于如何对抽象的定义给出直观可操作的解释．注意到题中的 $T_k(P)$ 是递归定义的，因此可以借用"路径选择"的方式进行思考．第 (3) 小题需要研究一个最优问题，解决方法是充分利用第 (2) 小题的结果，通过逐步调整的方式得到最优排列．*

解　将数对序列 P 按矩阵列写，其中第 k 列为数对 (a_k,b_k) ，$k=1,2,\cdots,n$ ，则 $T_k(P)$ 就是 a_1 的位置到 b_k 的位置 (左上角到右下角) 的路径中，经过 (每次只能往右或往下移动) 的数之和 (定义为路径的长度) 的最大值，如图所示．

$$\begin{array}{ccccccccc}a_1&\to&a_2&\to&a_3&&a_4&&a_5\\&&&&\downarrow&&&&\\b_1&&b_2&&b_3&\to&b_4&\to&b_5\end{array}$$

(1) 根据题意，有 $T_1(P)=7$ ，而 $T_2(P)=8$ ，如图．

$$\begin{array}{ccc}2&&4\\\downarrow&&\\5&\to&1\end{array}$$

(2) 根据题意，有

$$T_2(P)=a+d+\max\{b,c\}=(a+b+c+d)-\min\{b,c\},$$
$$T_2(P')=b+c+\max\{a,d\}=(a+b+c+d)-\min\{a,d\},$$

其中 $\min\{x,y\}$ 表示 x,y 中的最小数．当 $m=a$ 和 $m=d$ 时，均有

$$\min\{b,c\}\geqslant\min\{a,d\},$$

从而有 $T_2(P)\leqslant T_2(P')$ ．

(3) 可以按下图排列，使得路径符合要求 (路径不唯一)．

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & \to & 11 & \to & 16 & & 11 & & 5 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 6 & & 11 & & 11 & \to & 8 & \to & 2 \end{array}$$

此时 $T_5(P)=52$ ．

拓展　为了说明第 (3) 小题中数对序列的构造的过程，我们先证明一个引理．

引理　设 (a_k,b_k) 和 (a_{k+1},b_{k+1}) 是数对序列 P 中的相邻两列，若 a_k,b_k,a_{k+1},b_{k+1} 中的最小数为 a_{k+1} 或 b_k ，那么交换这两列后得到的数对序列 P' 满足 $T_n(P')\leqslant T_n(P)$ ．

引理的证明　数对序列 P 如图．

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{k-1} & b_k & b_{k+1} & b_{k+2} & \cdots & b_n \end{array}$$

按路径中“↓”发生的位置，列举出所有路径 $l_i(P)$ (表示路径中包含 $a_i\to b_i$) 的长度 $S_i(P)$ ，其中 $i=1,2,\cdots,n$ ，则

$$S_i(P)=\sum_{k=1}^{i}a_k+\sum_{k=i}^{n}b_k,$$

这样就有

$$T_n(P)=\max\{S_1(P),S_2(P),\cdots,S_n(P)\}.$$

交换后的数对序列 P' 对应的路径 $l_i(P')$ 均发生了改变，但是只有 $S_k(P')$ 与 $S_{k+1}(P')$ 发生了变化．

根据第 (2) 小题的结果，有

$$\max\{S_k(P'),S_{k+1}(P')\}\leqslant\max\{S_k(P),S_{k+1}(P)\},$$

因此

$$T_n(P')=\max\{S_1(P'),S_2(P'),\cdots,S_n(P')\}\leqslant T_n(P),$$

这样就证明了引理．

应用引理，可以先将数对序列优化为 $(4,6)$ 为第一列，同时 $(5,2)$ 为最后一列，接下来将 $(11,11)$ 和 $(11,8)$

分别放在第二列和第四列的位置，而将 $(16,11)$ 安排在第三列的位置，可以使得结果最优．
由于调整过程可能不会改变 $T_n(P)$ 的值，因此实际上使得结果最优的排列方法并不唯一．

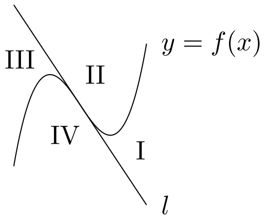
5.7 梅开三度

文科第 **20** 题． 已知函数 $f(x)=2x^3-3x$ ．
(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值；
(2) 若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 t 的取值范围；
(3) 问过点 $A(-1,2)$ ， $B(2,10)$ ， $C(0,2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切?(只需写出结论)

分析 *第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的最值，属于常规问题．第 (2) 小题考查利用导函数求曲线的切线方程，其中符合题意的切线的数目又需要解决一个零点问题，同样利用导函数进行研究．解决第 (3) 小题需要在第 (2) 小题的基础上进行一般化的研究，然后再特殊化为三个具体的点．*

解 (1) 函数 $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=6\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
于是函数 $f(x)$ 在 $\left[-2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 上单调递增，在 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极大值为 $\sqrt{2}$ ，在 $x=1$ 处的函数值为 $f(1)=-1$ ，因此函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值为
$$\max\left\{f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1)\right\}=\max\left\{\sqrt{2},-1\right\}=\sqrt{2}.$$
(2) 设过点 $P(1,t)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，且切点横坐标为 m ，则切线方程为
$$y=(6m^2-3)(x-m)+2m^3-3m,$$
切线经过点 $(1,t)$ ，因此
$$t=(6m^2-3)(1-m)+2m^3-3m,$$
即 $t=-4m^3+6m^2-3$ ．
令 $g(m)=-4m^3+6m^2-3$, 则函数 $g(m)$ 的导函数
$$g'(m)=12m(1-m),$$
于是函数 $g(m)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．
依题意，直线 $y=t$ 与函数 $g(m)$ 的图象有三个不同的公共点，因此 t 的取值范围为 $(g(0),g(1))$ ，即 $(-3,-1)$ ．
(3) 过点 $A(-1,2)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切；
过点 $B(2,10)$ 存在 2 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切；
过点 $C(0,2)$ 存在 1 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切．

拓展　一般地，如图，过三次函数 $f(x)$ 图象的对称中心作切线 l，则坐标平面被切线 l 和函数 $f(x)$ 的图象分割为四个区域，有以下结论[1]：



(1) 过区域 I、III 内的点作 $y=f(x)$ 的切线，有且仅有 3 条；

(2) 过区域 II、IV 内的点以及对称中心作 $y=f(x)$ 的切线，有且仅有 1 条；

(3) 过切线 l 或函数 $f(x)$ 图象 (除去对称中心) 上的点作 $y=f(x)$ 的切线，有且仅有 2 条.

[1]证明过程以及三次函数的其他性质详见附录『三次函数的性质』

第六章　重庆卷

6.1　暗藏杀机

理科第 10 题.　已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 满足

$$\sin 2A+\sin(A-B+C)=\sin(C-A-B)+\frac{1}{2},$$

面积 S 满足 $1\leqslant S\leqslant 2$，记 a,b,c 分别为 A,B,C 所对的边，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $bc(b+c)>8$　　B. $ab(a+b)>16\sqrt{2}$

C. $6\leqslant abc\leqslant 12$　　D. $12\leqslant abc\leqslant 24$

分析　根据已知，有

$$\sin 2A+\sin[A-(B-C)]+\sin[A+(B-C)]=\frac{1}{2},$$

于是

$$2\sin A\cos A+2\sin A\cos(B-C)=\frac{1}{2},$$

也即

$$2\sin A[-\cos(B+C)+\cos(B-C)]=\frac{1}{2},$$

化简得

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{8}.$$

另一方面，设 d 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，则

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C\cdot d^2=\frac{1}{16}d^2,$$

因此 $4\leqslant d\leqslant 4\sqrt{2}$．进而

$$abc=d^3\sin A\sin B\sin C\in\left[8,16\sqrt{2}\right],$$

且由 $b+c>a$ 易得 $bc(b+c)>8$．

解　A

拓展 本题给出了三角形中的常用恒等式

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

的证明方法.

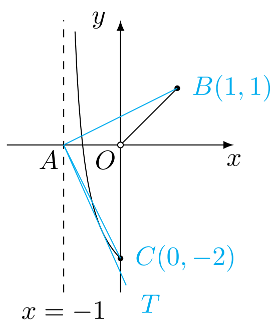
6.2 “何”不出图

文科第 10 题. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}-3, & x\in(-1,0],\\ x, & x\in(0,1],\end{cases}$ 且 $g(x)=f(x)-mx-m$ 在 $(-1,1]$ 内有且仅有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ B. $\left(-\dfrac{11}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

C. $\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$ D. $\left(-\dfrac{11}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$

分析 问题即恒过点 $(-1,0)$，且斜率为 m 的直线 $y=m(x+1)$ 与函数 $f(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点，如图.



容易计算得直线 AB 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，直线 AC 的斜率为 -2，设切线 AT 的斜率为 k，则联立直线 $y=k(x+1)$ 与双曲线 $y=\dfrac{1}{x+1}-3$ 的方程，得

$$k(x+1)^2+3(x+1)-1=0,$$

视其为关于 $x+1$ 的二次方程，判别式

$$\Delta=9+4k=0,$$

解得 $k=-\dfrac{9}{4}$.

综上，直线 $y=m(x+1)$ 的斜率 m 的取值范围是 $\left(-\dfrac{9}{4},-2\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

解 A

6.3　恰到好处

理科第 13 题．　已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 相交于 A,B 两点，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则实数 $a=$________．

分析 根据题意，圆心 C 到直线 $ax+y-2=0$ 的距离为半径的 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此有

$$\frac{|a+a-2|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2,$$

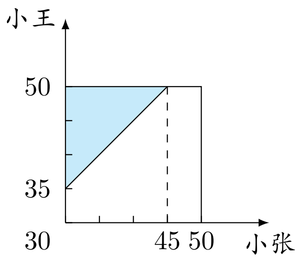
解得 $a=4\pm\sqrt{15}$．

解　$4\pm\sqrt{15}$

6.4　如约而至

文科第 15 题．　某校早上 $8:00$ 开始上课，假设该校学生小张与小王在早上 $7:30\sim 7:50$ 之间到校，且每人在该时间段的任何时刻到校是等可能的，则小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为________．(用数字作答)

分析 如图，基本事件空间是边长为 20 的正方形区域，事件空间是直角边长为 15 的等腰直角三角形区域．



利用几何概型可得所求的概率为

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 15^2}{20^2}=\frac{9}{32}.$$

解　$\dfrac{9}{32}$

6.5　按部就班

文科第 19 题．　已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{a}{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y=\dfrac{1}{2}x$．

(1) 求 a 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值．

分析 第 *(1)* 小题考查利用导函数求曲线的切线；第 *(2)* 小题考查利用导函数研究函数的单调区间与极值，均属于常规问题．由于参数在第 *(1)* 小题中已经确定，因此此题难度很低．

解 (1) 根据题意，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2},$$

而 $f'(1)=-2$，从而解得 $a=\frac{5}{4}$．

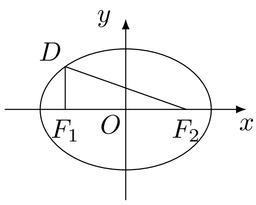
(2) 由第 (1) 小题的结果，可得

$$f'(x)=\frac{x+1}{4x^2}\cdot(x-5),x>0$$

于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(5,+\infty)$；单调递减区间是 $(0,5)$．在 $x=5$ 处取得极小值，极小值为 $f(5)=-\ln 5$．

6.6 故弄玄虚

理科第 21 题/文科第 21 题． 如图，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 D 在椭圆上，$DF_1\perp F_1F_2$，$\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$，$\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．



(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 设圆心在 y 轴上的圆与椭圆在 x 轴的上方有两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点，求圆的半径[1]．

分析 *第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题．第 (2) 小题通过直线与圆相切描述了一个与椭圆的焦点弦长有关的几何量，具体求解的时候只需要在椭圆中进行即可．*

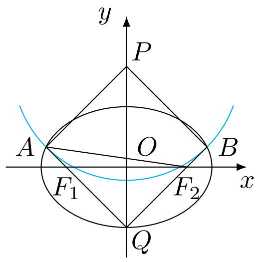
解 (1) 根据题意，由 $DF_1\perp F_1F_2$ 得 $|DF_1|=\frac{b^2}{a}$，进而有

$$\begin{cases}2c=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{b^2}{a},\\ \dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\\ c=1,\end{cases}$$

因此椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

(2) 如图，设圆心为 P，切点分别为 A,B，圆在 A,B 处的切线分别为 QA,QB，其中 Q 为两条切线的交点，则根据题意，$PA\perp AQ$，$PB\perp BQ$，$BQ\perp AQ$，$|PA|=|PB|$，因此四边形 $PAQB$ 为正方形．

[1] 文科第 21 题将此小题改为了探索型问题，并需要给出圆的方程．事实上，圆的方程为 $x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$



由椭圆和圆的对称性可得直线 AQ, BQ 的斜率分别为 $-1, 1$，因此 Q 为椭圆的下顶点，于是圆的半径就是过焦点的弦 AQ 的长度.

连接 AF_2，设 $|AF_1| = m$，则 $|AF_2| = 2\sqrt{2} - m$，在直角三角形 AQF_2 中，有

$$|AQ|^2 + |QF_2|^2 = |AF_2|^2,$$

即

$$(\sqrt{2} + m)^2 + (\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2} - m)^2,$$

解得 $m = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

因此所求半径的长为 $|AQ| = |QF_1| + |F_1A| = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

拓展　过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(\,a > b > 0\,)$ 的焦点的弦长为 $\dfrac{2ab^2}{b^2 + c^2\sin^2\theta}$，其中 θ 为弦所在的直线与长轴所在的直线所成的角[1].

6.7　漩涡风暴

理科第 22 题.　设 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 2} + b\,(n \in \mathbf{N}^*)$.

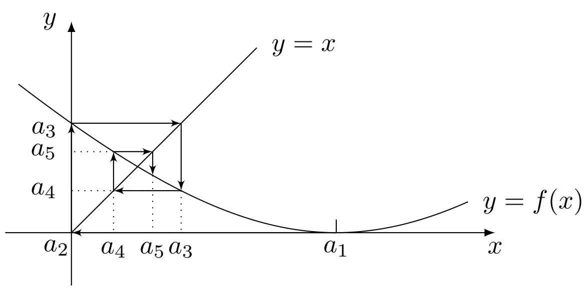
(1) 若 $b = 1$，求 a_2，a_3 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b = -1$，问：是否存在实数 c，使得 $a_{2n} < c < a_{2n+1}$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立？证明你的结论.

分析　第 *(1)* 小题是由数列的递推公式求数列的通项公式的常规问题，只需要对递推公式稍加变形即可．第 *(2)* 小题是数列的子列的有界性问题，可以利用迭代函数[2]

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1$$

进行探索，如图.



[1] 证明过程及更多相关内容详见附录『焦半径公式』

[2] 详见附录『迭代函数法』

由于直线 $y=x$ 与函数 $f(x)$ 的交点横坐标为 $\dfrac{1}{4}$，接下来证明 $c=\dfrac{1}{4}$ 即可.

解 (1) 当 $b=1$ 时，有

$$\begin{aligned}a_2&=\sqrt{a_1^2-2a_1+2}+1=2,\\a_3&=\sqrt{a_2^2-2a_2+2}+1=\sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

一般地，递推公式可以变形为

$$(a_{n+1}-1)^2-(a_n-1)^2=1,$$

因此 $\{(a_n-1)^2\}$ 是首项为 $(a_1-1)^2=0$，公差为 1 的等差数列，从而有

$$(a_n-1)^2=n-1,n=1,2,\cdots,$$

显然 $a_n\geqslant 1\,(\,n=1,2,\cdots\,)$，因此数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\sqrt{n-1}+1,n\in\mathbf{N}^*.$$

(2) 符合题意的实数 c 存在，且 $c=\dfrac{1}{4}$，证明如下.
设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}-1$，则 $a_{n+1}=f(a_n)$，且 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减.
接下来用数学归纳法证明一个更强的命题:

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,0\leqslant a_{2n}<\frac{1}{4}<a_{2n+1}\leqslant 1.$$

当 $n=1$ 时，由于 $a_2=0$，$a_3=\sqrt{2}-1$，命题显然成立.
假设命题当 $n=k\,(\,k\in\mathbf{N}^*\,)$ 时成立，即

$$0\leqslant a_{2k}<\frac{1}{4}<a_{2k+1}\leqslant 1,$$

则由于函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，于是

$$f(0)\geqslant f(a_{2k})>\frac{1}{4}>f(a_{2k+1})\geqslant f(1),$$

也即

$$1>\sqrt{2}-1\geqslant a_{2k+1}>\frac{1}{4}>a_{2k+2}\geqslant 0,$$

再次利用函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，于是可得

$$f(1)\leqslant f\left(a_{2k+1}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(a_{2k+2}\right)\leqslant f(0),$$

即

$$0\leqslant a_{2k+2}<\frac{1}{4}<a_{2k+3}\leqslant 1,$$

因此命题对 $n=k+1$ 时也成立.

综上，命题 $\forall n \in \mathbf{N}^{*}, 0 \leqslant a_{2n} < \dfrac{1}{4} < a_{2n+1} \leqslant 1$ 成立，因此原命题成立.

第七章　福建卷

7.1　展开式记法

理科第 10 题.　用 a 代表红球，b 代表蓝球，c 代表黑球，由加法原理及乘法原理，从 1 个红球和 1 个蓝球中取出若干个球的所有取法可由 $(1+a)(1+b)$ 的展开式 $1+a+b+ab$ 表示出来，如："1"表示一个球都不取、"a"表示取出一个红球，而"ab"则表示把红球和蓝球都取出来.

依此类推，下列各式中，其展开式可用来表示从 5 个无区别的红球、5 个无区别的蓝球、5 个有区别的黑球中取出若干个球，且所有的蓝球都取出或都不取出的所有取法的是 (　　)

A. $\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right)\left(1+b^5\right)(1+c)^5$

B. $\left(1+a^5\right)\left(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5\right)(1+c)^5$

C. $(1+a)^5\left(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5\right)\left(1+c^5\right)$

D. $\left(1+a^5\right)(1+b)^5\left(1+c+c^2+c^3+c^4+c^5\right)$

分析 依题意，用 x 表示某种颜色的球，n 为该种颜色的球的数量.

当 n 个球互不相同时，每个球都有取或者不取两种可能，并且每个球是否被选取和其他球无关，因此用

$$\underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdots(1+x)}_{n\text{ 个}}=(1+x)^n$$

表示；

当 n 个球无区别时，那么选取该种颜色的球时的不同可能只与选取的球的数目有关，因此用

$$1+x+x^2+\cdots+x^n$$

表示；

当 n 个球同时选取或者都不选取时，显然用 $1+x^n$ 表示.

因此将选取球的步骤按颜色分为三步，那么就有

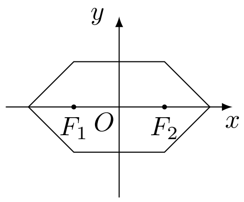
$$\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right)\left(1+b^5\right)(1+c)^5$$

为所求.

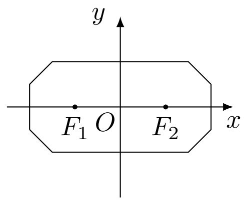
解　A

7.2 折线椭圆

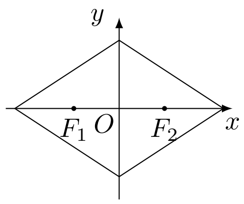
文科第 12 题． 在平面直角坐标系中，两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 间的“L-距离”定义为 $||P_1P_2||=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，则平面内与 x 轴上两个不同的定点 F_1,F_2 的“L-距离”之和等于定值 (大于 $||F_1F_2||$) 的点的轨迹可以是 (　　)



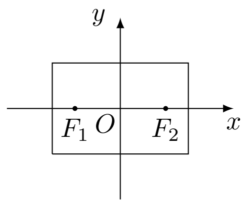
A



B



C



D

分析 设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$c>0$，轨迹上的任意一点 $M(x,y)$，则根据 L-距离的定义，有

$$|x+c|+|x-c|+2|y|=2a,$$

不难得到在分区域讨论去掉绝对值符号后，方程总表现为直线方程，因此曲线由多段线段形成．而这些直线的斜率可能为 $0,1,-1$，即可得到答案．

解　A

7.3 真相只有一个

理科第 15 题． 若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$，且下列四个关系：① $a=1$；② $b\neq 1$；③ $c=2$；④ $d\neq 4$，有且只有一个是正确的，则符合条件的有序数组 (a,b,c,d) 的个数是________．

分析 由于② 和 ④ 成立的可能性较高，因此从 (b,d) 出发分为 5 类．
第一类，$(b,d)=(1,4)$ 时，$a\neq 1$，因此 $c=2$，所以 $(a,c)=(3,2)$ 符合题意；
第二类，$(b,d)=(1,2)$ 时，对 a,c 无要求，所以 $(a,c)=(3,4)$ 或 $(4,3)$ 均符合题意；
第三类，$(b,d)=(1,3)$ 时，只需要 $c\neq 2$，所以 $(a,c)=(2,4)$ 符合题意；
第四类，$(b,d)=(2,4)$ 时，只需要 $a\neq 1$，所以 $(a,c)=(3,1)$ 符合题意；
第五类，$(b,d)=(3,4)$ 时，需要 $a\neq 1$ 且 $c\neq 2$，所以 $(a,c)=(2,1)$ 符合题意．
综上，符合题意的有序数组 (a,b,c,d) 的个数为 6．

解　6

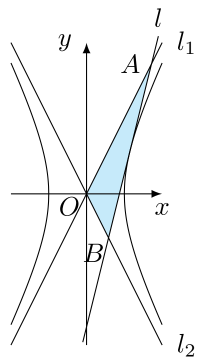
文科第 16 题． 已知集合 $\{a,b,c\}=\{0,1,2\}$，且下列三个关系：① $a\neq 2$；② $b=2$；③ $c\neq 0$ 有且只有一个正确，则 $100a+10b+c$ 等于________．

分析　与理科第 15 题类似，按 (a,c) 的取值思考，不难得到只有当 $(a,c)=(2,1)$ 时，$b=0$ 符合题意，因此 $100a+10b+c=201$.

解　201

7.4　双曲线的等积性质

理科第 **19** 题.　已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1:y=2x$, $l_2:y=-2x$.
(1) 求双曲线 E 的离心率;
(2) 如图，O 为坐标原点，动直线 l 分别交直线 l_1,l_2 于 A , B 两点 (A,B 分别在第一、四象限)，且 $\triangle OAB$ 的面积恒为 8，试探究：是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E ? 若存在，求出双曲线 E 的方程；若不存在，说明理由.



分析　第 (1) 小题考查双曲线的基本量与方程，属于常规问题．第 (2) 小题是一个性质探求的问题，可以先用特殊位置确定可能的双曲线方程，再去尝试证明．事实上，取与 x 轴垂直的直线 AB 即可计算得双曲线 $E:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$. 证明时如何简洁地表达双曲线上某点处的切线是解决问题的关键，可以利用交点曲线系表达[1].

解　(1) 根据题意有 $\dfrac{b^2}{a^2}=4$, 从而双曲线的离心率

$$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{5}.$$

(2) 存在符合题意的双曲线 E , 且 $E:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$, 证明如下.
设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线右支上一点，满足 $\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{y_0^2}{16}=1$, 曲线 $\varGamma:\dfrac{(x-x_0)^2}{4}-\dfrac{(y-y_0)^2}{16}=0$, 则曲线 $\varGamma$ 与双曲线 E 只有唯一的公共点 P , 将两条曲线的方程相减，得到直线

$$m:\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}-1\right)-\left[\frac{(x-x_0)^2}{4}-\frac{(y-y_0)^2}{16}\right]=0,$$

即

$$m:\frac{x_0x}{4}-\frac{y_0y}{16}=1$$

[1]详见附录『圆锥曲线的切线方程』

必然通过点 P，且直线 m 上不存在除 P 以外的双曲线上的点 (否则方程左边的两个括号中，第一个为 0，而第二个不为 0，矛盾)，因此 m 即双曲线 E 在点 P 处的切线方程．

将直线 m 的方程分别与直线 $y=2x$ 和 $y=-2x$ 联立，可得 A,B 两点的横坐标 x_1,x_2 满足

$$\left(\frac{x_0}{4}-\frac{y_0}{8}\right)x_1=1,\left(\frac{x_0}{4}+\frac{y_0}{8}\right)x_2=1,$$

两式相乘得

$$\left(\frac{x_0^2}{16}-\frac{y_0^2}{64}\right)x_1x_2=1,$$

即 $x_1x_2=4$．

由 $\tan\angle AOx=2$ 可得

$$\sin\angle AOB=\frac{2\tan\angle AOx}{1+\tan^2\angle AOx}=\frac{4}{5},$$

于是三角形 AOB 的面积

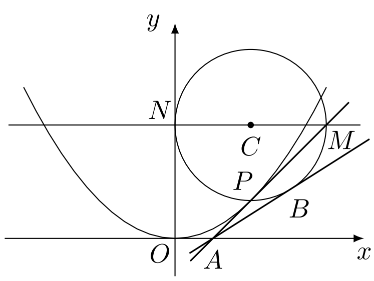
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\sin\angle AOB\cdot|OA|\cdot|OB|\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\sqrt{1+2^2}\cdot x_1\cdot\sqrt{1+(-2)^2}\cdot x_2\\&=8,\end{aligned}$$

从而命题得证．

拓展　实际上可以通过伸缩变换 $\begin{cases}x'=x,\\y'=\dfrac{1}{2}y,\end{cases}$ 将双曲线“压缩”为等轴双曲线，然后将双曲线旋转，使得两条渐近线分别与 x 轴和 y 轴重合，此时研究反比例函数 $y=\dfrac{m^2}{x}$ (其中 $m>0$，实轴长为 $2\sqrt{2}m$) 的图象的性质即可．

7.5　岿然不动

文科第 **21** 题．　已知曲线 Γ 上的点到点 $F(0,1)$ 的距离比它到直线 $y=-3$ 的距离小 2．



(1) 求曲线 Γ 的方程；

(2) 曲线 Γ 在点 P 处的切线 l 与 x 轴交于点 A．直线 $y=3$ 分别与直线 l 及 y 轴交于点 M，N．以 MN 为直径作圆 C，过点 A 作圆 C 的切线，切点为 B，试探究：当点 P 在曲线 Γ 上运动 (点 P 与原点不重合) 时，线段 AB 的长度是否发生变化？证明你的结论．

分析　第 (1) 小题考查抛物线的定义与方程，第 (2) 小题考查直线与抛物线相切[1]以及直线与圆相切，从抛物线上的点 P 的坐标出发依次计算各个相关方程及几何量，不难得到结论.

解　(1) 根据题意，曲线 Γ 是 $F(0,1)$ 为焦点，直线 $y=-1$ 为准线的抛物线，因此其方程为 $x^2=4y$.
(2) $|AB|$ 为定值，证明如下.
设 $P(4t,4t^2)$ ，则抛物线 Γ 在 P 处的切线方程为

$$y=2t(x-4t)+4t^2,$$

即 $y=2tx-4t^2$. 因此点 A 的坐标为 $A(2t,0)$.
进而点 M,N 的坐标分别为 $M\left(2t+\dfrac{3}{2t},3\right)$ ， $N(0,3)$ ，因此圆 C 的半径 $r=t+\dfrac{3}{4t}$.
于是线段 AB 的长，即切线长满足

$$|AB|^2=|AC|^2-r^2=\left(t-\frac{3}{4t}\right)^2+9-\left(t+\frac{3}{4t}\right)^2=6,$$

为定值，因此命题得证.

7.6　得寸进尺

理科第 20 题/文科第 22 题.　已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ (a 为常数) 的图象与 y 轴交于点 A ，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1 .
(1) 求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；
(2) 证明：当 $x>0$ 时， $x^2<\mathrm{e}^x$ ；
(3) 证明[2]：对任意给定的正数 c ，总存在 x_0 ，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<c\mathrm{e}^x$.

分析　第 (1) 小题考查利用导函数求曲线的切线方程，属于常规问题. 第 (2) 小题中与函数不等式相关的函数的导函数恰好为 $f(x)$ ，因此可以利用第 (1) 小题的结论直接证出. 而对于第三问，我们可以类比从第 (1) 小题的结果得到第 (2) 小题的结果的过程 (实际上就是积分)，得到 e^x 的三次多项式的下界，然后稍加放缩即可转化为二次多项式的下界.

解　(1) 根据题意，函数 $f(x)$ 的图象与 y 轴交于 $A(0,1)$ ，而函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-a,$$

因此 $f'(0)=-1$ ，解得 $a=2$.
此时 $f(x)=\mathrm{e}^x-2x$ ，其导函数 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=\ln 2$ 处取得极小值为 $f(\ln 2)=2-2\ln 2$.
(2) 设函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-x^2$ ，则

$$g'(x)=\mathrm{e}^x-2x,$$

[1] 详见附录『圆锥曲线的切线方程』
[2] 文科第 22 题中第 (3) 小题削弱为：“证明：对任意给定的正数 c ，总存在 x_0 ，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x<c\mathrm{e}^x$.”可以由第 (2) 小题直接证明

根据第 (1) 小题的结论，$g'(x)$ 的极小值同时也为最小值，而 $2-2\ln 2>0$，因此对任意实数 x，$g'(x)>0$，因此 $g(x)$ 单调递增，从而当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=1>0$，命题得证．

(3) 令 $h(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{3}x^3\ (x>0)$，则 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=\mathrm{e}^x-x^2,$$

由第 (2) 小题结论可知当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，进而 $h(x)>h(0)=1$．这样我们就得到了：对任意给定的正数 c，均有

$$c\mathrm{e}^x>\frac{1}{3}cx^3=\frac{1}{3}cx\cdot x^2,$$

因此取 $x_0=\dfrac{3}{c}$，那么就有当 $x>x_0$ 时，恒有

$$c\mathrm{e}^x>x^2,$$

原命题得证．

第八章　广东卷

8.1　直击要害

理科第 8 题．　设集合 $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\mid x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,3,4,5\}$，那么集合 A 中满足条件"$1\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|\leqslant3$"的元素个数为（　　）

A. 60　　B. 90　　C. 120　　D. 130

分析　设有序数对 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 中 0 的个数为 k，则由题中条件可得 $k=2,3,4$．首先确定这 k 个 0 由 $x_i\,(i=1,2,3,4,5)$ 中的哪 k 个提供，有 C_5^k 种不同的方法；然后确定剩下的 $5-k$ 个数中每个数取 -1 还是取 1，有 2^{5-k} 种不同的方法．因此所求的元素个数为

$$\mathrm{C}_5^2\cdot2^3+\mathrm{C}_5^3\cdot2^2+\mathrm{C}_5^4\cdot2^1=130.$$

解　D

8.2　共轭复数

文科第 10 题．　对任意复数 ω_1,ω_2，定义 $\omega_1*\omega_2=\omega_1\overline{\omega_2}$，其中 $\overline{\omega_2}$ 是 ω_2 的共轭复数，对任意复数 z_1,z_2,z_3 有如下四个命题：

① $(z_1+z_2)*z_3=(z_1*z_3)+(z_2*z_3)$；

② $z_1*(z_2+z_3)=(z_1*z_2)+(z_1*z_3)$；

③ $(z_1*z_2)*z_3=z_1*(z_2*z_3)$；

④ $z_1*z_2=z_2*z_1$，

则真命题的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析　根据题中对"$*$"运算的定义，以及复数的共轭运算与复数的四则运算可以任意交换顺序，可得：

命题 ① 中的等式左右两边均为 $z_1\overline{z_3}+z_2\overline{z_3}$；

命题 ② 中等式左右两边均为 $z_1\overline{z_2}+z_1\overline{z_3}$；

命题 ③ 中等式左边为 $z_1\overline{\overline{z_2}z_3}$，等式右边为 $z_1\overline{z_2}z_3$；

命题 ④ 中等式左边为 $z_1\overline{z_2}$，等式右边为 $z_2\overline{z_1}$．

因此只有命题 ① 和命题 ② 是真命题．

解　B

8.3　数列的互补性

理科第 13 题.　若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2\mathrm{e}^5$，则 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$________.

分析　*由等比数列的性质可得*

$$a_1a_{20}=a_2a_{19}=\cdots=a_9a_{12}=a_{10}a_{11},$$

结合已知可得它们的值都为 e^5. *因此用倒序相加法可得所求式子的值为*

$$\frac{\ln(a_1a_{20})+\ln(a_2a_{19})+\cdots+\ln(a_{20}a_1)}{2}=\frac{20\ln\mathrm{e}^5}{2}=50.$$

解　50

文科第 13 题.　等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_1a_5=4$，则 $\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\log_2a_4+\log_2a_5=$________.

分析　*与理科第 13 题类似，由等比数列的性质可得*

$$a_1a_5=a_2a_4=a_3^2=4,$$

因此用倒序相加法可得欲求代数式的值为

$$\frac{\log_2(a_1a_5)+\log_2(a_2a_4)+\log_2a_3^2+\log_2(a_4a_2)+\log_2(a_5a_1)}{2}=\frac{5\log_24}{2}=5.$$

解　5

8.4　蒙日圆

理科第 20 题/文科第 20 题.　已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个焦点为 $\left(\sqrt{5},0\right)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

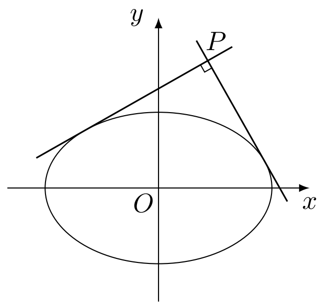
(2) 若动点 $P\,(x_0,y_0)$ 为椭圆 C 外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

分析　*第 (1) 小题考查椭圆的基本量与方程，属于常规问题. 第 (2) 小题是一个轨迹方程问题，注意到关键条件是两条切线互相垂直，因此得到关于切线的斜率的方程，并利用韦达定理表达垂直是解决问题的核心步骤.*

解　(1) 记 c 为椭圆的半焦距，则根据题意有 $c=\sqrt{5}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，进而可得 $a=3$，$b=2$. 因此椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) 方法一

当 $x_0 \neq \pm 3$ 时，如图，设过 $P(x_0, y_0)$ 的椭圆 C 的切线为 $y = k(x - x_0) + y_0\ (k \neq 0)$．



联立该直线与椭圆方程得

$$\frac{x^2}{9} + \frac{1}{4}(kx + y_0 - kx_0)^2 = 1,$$

整理得

$$(9k^2+4)x^2 + 18(y_0 - kx_0)kx + 9(y_0 - kx_0)^2 - 36 = 0,$$

其判别式 $\Delta = 0$，即

$$(9 - x_0^2)\cdot k^2 + 2x_0y_0 \cdot k + 4 - y_0^2 = 0.$$

根据题意，这个关于 k 的方程的两根 k_1, k_2，即点 P 到椭圆 C 的两条切线的斜率，因此有 $k_1 \cdot k_2 = -1$，从而

$$\frac{4 - y_0^2}{9 - x_0^2} = -1,$$

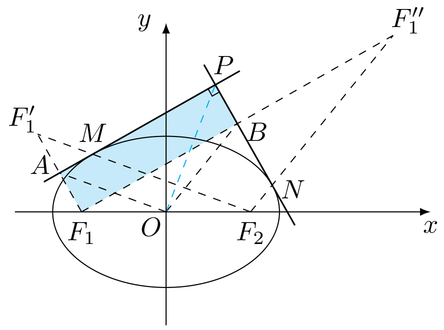
即

$$x_0^2 + y_0^2 = 13(x_0 \neq \pm 3).$$

当 $x_0 = \pm 3$ 时，P 点的坐标为 $(3, \pm 2)$ 以及 $(-3, \pm 2)$，也符合上述方程．综上所述，所求轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 13$．

方法二

如图，设两个切点分别 M, N，作椭圆的左焦点 F_1 关于两条切线 PM, PN 的对称点，分别为 F_1', F_1''，连接 $F_1F_1', F_1F_1'', F_2F_1', F_2F_1''$，$A, B$ 分别为线段 F_1F_1', F_1F_1'' 的中点，连接 OA, OB, OP．



根据椭圆的光学性质，F_2, M, F_1' 以及 F_2, N, F_1'' 均三点共线，因此 $|OA| = |OB| = 3$．由于四边形 $APBF_1$ 为矩形，因此[1]

$$|OP|^2 + |OF_1|^2 = |OA|^2 + |OB|^2,\ \text{即}\ |OP|^2 = 13,$$

[1]矩形的性质：矩形所在的平面上一点到矩形的两条对角线的端点的距离的平方和相等

从而点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$.

拓展 一般地，判断直线 $Ax+By+C=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的位置关系时，有等效判别式

$$\Delta_0=a^2A^2+b^2B^2-C^2,$$

当 $\Delta_0>0$ 时，直线与椭圆相交；当 $\Delta_0=0$ 时，直线与椭圆相切；当 $\Delta_0<0$ 时，直线与椭圆相离.
这一结论的证明留给读者. 利用此结论很容易将本题拓展到一般情形，对于一般的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a,b>0\,)$，其互相垂直的切线的交点形成的轨迹为 $x^2+y^2=a^2+b^2$. 这个圆[1]叫做蒙日圆，它的发现人是法国几何学家蒙日 (G.Monge,1746-1818). 蒙日圆的进一步推广是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的任意两条夹角为 θ 的切线的交点的轨迹方程是

$$\left(x^2+y^2-a^2-b^2\right)^2\tan^2\theta=4b^2x^2+4a^2y^2-4a^2+b^2.$$

此外，对于抛物线 $y^2=2px\,(\,p>0\,)$，任意两条互相垂直的切线的交点的轨迹是直线 $x=-\dfrac{p}{2}$.

8.5 过五关斩六将

理科第 21 题. 设函数 $f\,(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+2x+k\right)^2+2\left(x^2+2x+k\right)-3}}$ ，其中 $k<-2$.
(1) 求函数 $f\,(x)$ 的定义域 D (用区间表示);
(2) 讨论函数 $f\,(x)$ 在 D 上的单调性;
(3) 若 $k<-6$, 求 D 上满足条件 $f\,(x)>f\,(1)$ 的 x 的集合 (用区间表示).

分析 本题中的函数是一个典型的复合函数，因此可以按照复合函数的定义域，单调性的研究方法进行研究. 其中第 (3) 小题注意先通过因式分解确定零点的位置，再结合单调性得到不等式的解集.

解 (1) 函数 $y=f(x)$ 可以看作是三个函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{u}},u=t^2+2t-3,t=x^2+2x+k$$

复合形成的函数.
函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ 的定义域为 $\{u|u>0\}$, 于是 t 的取值范围是 $\{t\,|t<-3$ 或 $t>1\}$, 因此函数 $y=f(x)$ 的定义域为

$$\left\{x|x^2+2x+k<-3 \text{ 或 } x^2+2x+k>1\right\}$$

即

$$\left\{x|x^2+2x+k+3<0 \text{ 或 } x^2+2x+k-1>0\right\}.$$

由于 $k<-2$, 因此可设关于 x 的方程 $x^2+2x+k-1=0$ 的两根分别为 $x_1,x_2\,(\,x_1<x_2\,)$，关于 x 的方程 $x^2+2x+k+3=0$ 的两根分别为 $x_3,x_4\,(\,x_3<x_4\,)$，则

$$x_1=-1-\sqrt{2-k},x_2=-1+\sqrt{2-k},x_3=-1-\sqrt{-2-k},x_4=-1+\sqrt{-2-k},$$

[1]对于圆 $x^2+y^2=a^2$, 对应的圆为 $x^2+y^2=2a^2$; 对于双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$, 对应的圆为 $x^2+y^2=a^2-b^2$ (如果 $a<b$, 则对应的轨迹不存在)

于是函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,x_1)\cup(x_3,x_4)\cup(x_2,+\infty)$.

(2) 注意到函数 $t=x^2+2x+k$ 的对称轴为 $x=-1$ ，最小值为 $k-1$ ，因此将定义域分段讨论如下.

x	$(-\infty,x_1)$	$(x_3,-1)$	$(-1,x_4)$	$(x_2,+\infty)$
函数 t_x	单调递减	单调递减	单调递增	单调递增
t	$(1,+\infty)$	$(k-1,-3)$	$(k-1,-3)$	$(1,+\infty)$
函数 u_t	单调递增	单调递减	单调递减	单调递增
函数 u_x	单调递减	单调递增	单调递减	单调递增

其中 $t_x=x^2+2x+k$ ， $u_t=t^2+2t-3$ ， $u_x=(x^2+2x+k)^2+2(x^2+2x+k)-3$.

又由于 $y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ 始终为单调递减函数，因此 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，在区间 $(x_3,-1)$ 上单调递减，在区间 $(-1,x_4)$ 上单调递增，在区间 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，其中

$$x_1=-1-\sqrt{2-k},x_2=-1+\sqrt{2-k},x_3=-1-\sqrt{-2-k},x_4=-1+\sqrt{-2-k}.$$

(3) 条件 $f(x)>f(1)$ 即

$$(x^2+2x+k)^2+2(x^2+2x+k)-3<(k+3)^2+2(k+3)-3,$$

也即

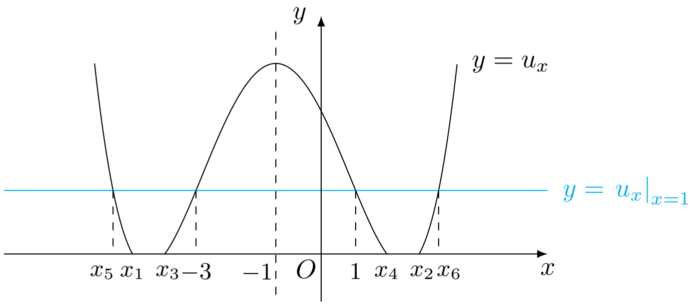
$$(x^2+2x+k+k+3)(x^2+2x+k-k-3)+2(x^2+2x+k-k-3)<0,$$

整理得

$$(x^2+2x+2k+5)(x^2+2x-3)<0.$$

由于 $k<-6$ ，于是方程 $x^2+2x+2k+5=0$ 的两根 x_5,x_6 ($x_5<x_6$) 分别在区间 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$ 上. 同时方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根 x_7,x_8 ($x_7<x_8$) 均在区间 (x_3,x_4) 上，且

$$x_5=-1-\sqrt{-2k-4},x_6=-1+\sqrt{-2k-4},x_7=-3,x_8=1.$$



结合函数 u_x 的定义域以及单调性可知不等式 $f(x)>f(1)$ 的解集为 $(x_5,x_1)\cup(x_3,-3)\cup(1,x_4)\cup(x_2,x_6)$,

其中

$$x_1=-1-\sqrt{2-k}, x_2=-1+\sqrt{2-k},$$
$$x_3=-1-\sqrt{-2-k}, x_4=-1+\sqrt{-2-k},$$
$$x_5=-1-\sqrt{-2k-4}, x_6=-1+\sqrt{-2k-4}.$$

8.6 查漏补缺

文科第 **21** 题. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax+1\,(a\in\mathbf{R})$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 当 $a<0$ 时, 试讨论是否存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使得 $f(x_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性, 第 (2) 小题考查利用导函数研究函数的零点, 均属于常规问题.

解 (1) 根据题意, 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=x^2+2x+a,$$

其判别式为 $\Delta=4(1-a)$, 因此按 a 与 1 的大小关系展开讨论.
第一种情形, 当 $a<1$ 时, $f'(x)$ 有两个不同零点, 于是 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1-\sqrt{1-a})$ 和 $(-1+\sqrt{1-a},+\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1-\sqrt{1-a},-1+\sqrt{1-a})$.
第二种情形, 当 $a\geqslant 1$ 时, $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增.
(2) 方程 $f(x_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 即

$$\frac{1}{3}x_0^3+x_0^2+ax_0+1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\cdot\frac{1}{2}+1,$$

移项并应用立方差公式及平方差公式得

$$\left[\frac{1}{3}\left(x_0^2+\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{4}\right)+x_0+\frac{1}{2}+a\right]\cdot\left(x_0-\frac{1}{2}\right)=0,$$

即

$$\left[\left(x_0+\frac{7}{4}\right)^2+3a-\frac{21}{16}\right]\cdot\left(x_0-\frac{1}{2}\right)=0,$$

由于 $x_0\neq\dfrac{1}{2}$, 因此问题转化为方程

$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=-3a+\frac{21}{16}$$

是否在区间 $(0,1)$ 上有不等于 $\dfrac{1}{2}$ 的解.
将上述方程的解看作函数 $g(x)=\left(x+\dfrac{7}{4}\right)^2$ 的图象与直线 $y=-3a+\dfrac{21}{16}$ 的公共点的横坐标, 注意到函数 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增, 因此易得当 $g(0)<-3a+\dfrac{21}{16}<g(1)$ 且 $-3a+\dfrac{21}{16}\neq g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 时, 存在符合题意的 x_0 .

不难解得当 $-\dfrac{25}{12}<a<-\dfrac{7}{12}$ 且 $a\neq-\dfrac{5}{4}$ 时，存在符合题意的 x_0 . 而当 a 取其他负实数时，不存在符合题意的 x_0 .

第九章　湖北卷

9.1　愚公移山，精卫填海

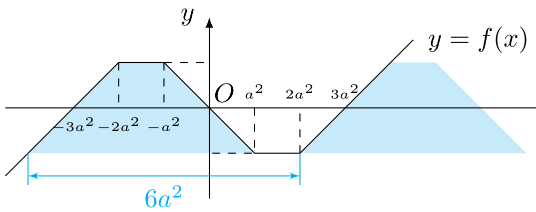
理科第 10 题.　已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x \geqslant 0$ 时，

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\left|x - a^2\right| + \left|x - 2a^2\right| - 3a^2\right).$$

若 $\forall x \in \mathbf{R}$，$f(x-1) \leqslant f(x)$，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$　　B. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

分析 当 $a \neq 0$ 时，用分界点 $x = a^2$ 和 $x = 2a^2$ 讨论，结合函数的奇偶性，不难画出函数的草图如图.



题中条件"$\forall x \in \mathbf{R}, f(x-1) \leqslant f(x)$"的含义是将函数图象向右平移 1 个单位，设法将图象中的"山"(阴影部分) 移动到原图象的下方[1] *(可以与边界重合). 因此有 $6a^2 \leqslant 1$. 结合 $a = 0$ 时显然符合题意，可解得实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$.*

解　B

9.2　困盖与圆周率

文科第 10 题.　《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土，这是我国现存最早的有系统的数学典籍，其中记载有求"囷盖"的术：*置如其周，令相乘也. 又以高乘之，三十六成一.* 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h，计算其体积 V 的近似公式 $V \approx \frac{1}{36}L^2h$，它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3. 那么，近似公式 $V \approx \frac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 (　　)

[1] 也可以考虑将"坑"填平

A. $\dfrac{22}{7}$ B. $\dfrac{25}{8}$ C. $\dfrac{157}{50}$ D. $\dfrac{355}{113}$

分析 圆锥的体积公式可以作如下变形：

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{12\pi}\cdot(2\pi r)^2\cdot h=\frac{1}{12\pi}L^2h,$$

于是若 $\dfrac{1}{12\pi}\approx\dfrac{2}{75}$ ，则相当于 $\pi\approx\dfrac{25}{8}$.

解 B

9.3 均值函数

理科第 14 题． 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数，且 $f(x)>0$ ，对任意 $a>0,b>0$ ，若经过点 $(a,f(a))$ ， $(b,-f(b))$ 的直线与 x 轴的交点为 $(c,0)$ ，则称 c 为 a,b 关于函数 $f(x)$ 的平均数，记为 $M_f(a,b)$ ，例如，当 $f(x)=1\,(x>0)$ 时，可得 $M_f(a,b)=c=\dfrac{a+b}{2}$ ，即 $M_f(a,b)$ 为 a ， b 的算术平均数．

(1) 当 $f(x)=$________ $(x>0)$ 时， $M_f(a,b)$ 为 a,b 的几何平均数；

(2) 当 $f(x)=$________ $(x>0)$ 时， $M_f(a,b)$ 为 a,b 的调和平均数 $\dfrac{2ab}{a+b}$.

(以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

分析 *(1)* 根据题意，有

$$\frac{f(a)-0}{a-\sqrt{ab}}=\frac{0-(-f(b))}{\sqrt{ab}-b},\ 即\ \frac{f(a)}{\sqrt{a}}=\frac{f(b)}{\sqrt{b}},$$

因此可以取 $f(x)=k\sqrt{x}\,(k>0)$;

(2) 根据题意，有

$$\frac{f(a)-0}{a-\dfrac{2ab}{a+b}}=\frac{0-(-f(b))}{\dfrac{2ab}{a+b}-b},\ 即\ \frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b},$$

因此可以取 $f(x)=kx\,(k>0)$;

解 (1) $\sqrt{x}$; (2) x .

9.4 阿波罗尼斯圆

文科第 17 题． 已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 和点 $A(-2,0)$ ，若定点 $B(b,0)\,(b\neq-2)$ 和常数 λ 满足：对圆 O 上任意一点 M ，都有 $|MB|=\lambda|MA|$ ，则

(1) $b=$________;

(2) $\lambda=$________.

分析 根据题意，有 $|MB|^2=\lambda^2|MA|^2$ ，设 $M(x,y)$ ，于是

$$(x-b)^2+y^2=\lambda^2\left[(x+2)^2+y^2\right],$$

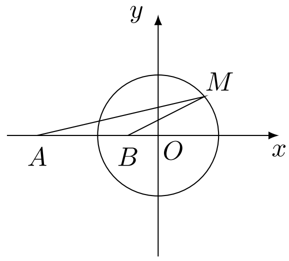
将 $y^2=1-x^2$ 代入，整理得

$$(4\lambda^2+2b)x+5\lambda^2-b^2-1=0,$$

该等式对任意 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 均成立，于是

$$4\lambda^2+2b=0, 5\lambda^2-b^2-1=0,$$

解得 $b=-\frac{1}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$ ($\lambda>0$，负值舍去).



解　(1) $-\frac{1}{2}$；(2) $\frac{1}{2}$.

拓展　平面上到两个定点的距离的比为常数 (不为 1 的正数) 的点的轨迹是圆，用这种方式定义的圆称为阿波罗尼斯圆.

9.5　一而二，二而三

理科第 21 题/文科第 22 题.　在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1 . 记点 M 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹 C 的方程；

(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2,1)$ ，求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点、两个公共点、三个公共点时 k 的相应取值范围.

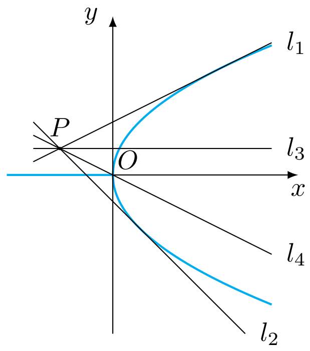
分析　第 (1) 小题是典型的轨迹问题，容易遗漏 $x<0$ 的部分；第 (2) 小题考查直线与抛物线的位置关系，确定分界点后展开讨论即得.

解　(1) 根据题意，设 $M(x,y)$ ，则

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1,$$

即 $y^2=2x+2|x|$. 因此轨迹 C 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

(2) 如图，直线 l_1,l_2 是抛物线 $y^2=4x$ 过点 $P(-2,1)$ 的两条切线，直线 l_3 是过 P 且与 x 轴平行的直线，直线 l_4 即直线 OP .



联立直线 $x+2=m(y-1)$ (其中 m 为斜率的倒数) 与抛物线 $y^2=4x$ 可得

$$y^2-4my+4m+8=0,$$

于是由判别式为零得到方程

$$m^2-m-2=0,$$

解得直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{2}$，直线 l_2 的斜率为 -1，又直线 l_3 的斜率为 0，直线 l_4 的斜率为 $-\frac{1}{2}$. 设直线 l 与 $C_1: y=0\,(x<0)$ 的公共点个数为 n_1，与 $C_2: y^2=4x$ 的公共点个数为 n_2，则直线 l 与轨迹 C 的公共点个数 $n=n_1+n_2$，讨论如下.

k	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
n_1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
n_2	0	1	2	2	2	1	2	1	0
n	1	2	3	2	2	1	3	2	1

因此直线 l 与轨迹 C 的公共点个数分别为 $1,2,3$ 时，对应的 k 的取值范围是

$$\begin{cases}(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right), & 1\text{ 个公共点},\\ \{-1\}\cup\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}, & 2\text{ 个公共点},\\ \left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right), & 3\text{ 个公共点}.\end{cases}$$

9.6 沙场秋点兵

理科第 22 题/文科第 21 题. π 为圆周率，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间;

(2) 求 $\mathrm{e}^3,3^\mathrm{e},\mathrm{e}^\pi,\pi^\mathrm{e},3^\pi,\pi^3$ 这六个数中的最大数与最小数;

(3) 将 $\mathrm{e}^3,3^\mathrm{e},\mathrm{e}^\pi,\pi^\mathrm{e},3^\pi,\pi^3$ 这六个数按从小到大的顺序排列，并证明你的结论[1].

[1] 文科第 21 题没有第 (3) 小题

分析　第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，给后面两个小题做铺垫．第 (2) 小题利用基本初等函数的性质进行初步比较后直接应用第 (1) 小题的结果就可以得到最大数与最小数．第 (3) 小题中的核心问题在于如何估计 $\ln\pi$ 的近似值，为了利用第 (1) 小题的结果，只需要选取 $x=\mathrm{e}^m\cdot\pi^n$ (其中 m,n 均为整数) 进行估算就可以了 (x 的值越靠近 e，估算的结果越靠近真实值)．

解　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},$$
因此函数 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减．
(2) 由幂函数与指数函数的单调性可得
$$\mathrm{e}^3<\mathrm{e}^\pi<3^\pi,3^\mathrm{e}<\pi^\mathrm{e}<\pi^3,$$
因此这六个数中的最大数为 $\max\{3^\pi,\pi^3\}$，最小数为 $\min\{\mathrm{e}^3,3^\mathrm{e}\}$．
根据第 (1) 小题的结果，有
$$\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln\pi}{\pi},$$
从而
$$\mathrm{e}^3>3^\mathrm{e},3^\pi>\pi^3,$$
因此这六个数中的最大数为 3^π，最小数为 3^e．
(3) 根据第 (2) 小题的结果，只需要比较 e^3 和 π^e 的大小，以及 e^π 和 π^3 的大小．
与第 (2) 小题类似，只需要比较 $\ln\pi$ 与 $\dfrac{3}{\mathrm{e}},\dfrac{\pi}{3}$ 的大小关系．由于 $\dfrac{3}{\mathrm{e}}=1.10\ldots$，$\dfrac{\pi}{3}=1.04\ldots$，接下来估算 $\ln\pi$．
利用第 (1) 小题的结果可得
$$\frac{\ln\dfrac{\mathrm{e}^2}{\pi}}{\dfrac{\mathrm{e}^2}{\pi}}<\frac{1}{\mathrm{e}},$$
即
$$\ln\pi>2-\frac{\mathrm{e}}{\pi}>1.12,$$
因此
$$\ln\pi>\frac{3}{\mathrm{e}}>\frac{\pi}{3},$$
进而
$$\mathrm{e}^3<\pi^\mathrm{e}\text{ 且 }\mathrm{e}^\pi<\pi^3,$$
因此
$$3^\mathrm{e}<\mathrm{e}^3<\pi^\mathrm{e}<\mathrm{e}^\pi<\pi^3<3^\pi.$$

拓展　在 $x=\mathrm{e}^m\cdot\pi^n$ 中令 $m=-1$，$n=2$，则可以估计出 $\ln\pi$ 的上界 $\dfrac{\pi^2}{2\mathrm{e}^2}+\dfrac{1}{2}\approx1.17$．关于常数 e 和 π 还有很多有趣的知识，如 e^π 正是我们所知的盖尔范德常数，并且已经被证明了是超越数，但是我们对 π^e 却知之甚少，还没有证明它是无理数 (即使它确实是)．另外 $\pi^4+\pi^5\approx\mathrm{e}^6$，左右两边的小数点后前

4 位都是一样的[1].

[1] 稍微弱一点的近似等式为 $\dfrac{\pi^7}{\mathrm{e}^8} \approx 1.0132$

第十章　湖南卷

10.1　无独有偶

理科第 10 题.　已知函数 $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}(x<0)$ 与 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left(-\infty,\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$　　B. $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}})$　　C. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\sqrt{\mathrm{e}}\right)$　　D. $\left(-\sqrt{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

分析 根据题意，存在 $x>0$ 使得

$$(-x)^2+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}=x^2+\ln(x+a),$$

即函数

$$h(x)=\ln(x+a)-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$$

在 $(0,+\infty)$ 上存在零点.

当 $a>0$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因此当 $h(0)=\ln a-\dfrac{1}{2}<0$，即 $a<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，函数 $h(x)$ 的值域 $\left(\ln a-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 包含 0，因此在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点;

当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，函数 $h(x)$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，因此在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}})$.

解　B

10.2　斗转星移

理科第 16 题/文科第 10 题.　在平面直角坐标系中，O 为原点，$A(-1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C(3,0)$，动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的最大值是[1]________.

分析 将 $\overrightarrow{OD}$ 拆分为两个有相关描述的向量 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 之和:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|&=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}\right|\\&=\left|(2,\sqrt{3})+\overrightarrow{CD}\right|\\&\leqslant\left|(2,\sqrt{3})\right|+\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{7}+1,\end{aligned}$$

[1]文科第 10 题将填空改为了选择

等号当且仅当 $\overrightarrow{CD}$ 与向量 $(2,\sqrt{3})$ 同向时取得.
因此所求的最大值为 $\sqrt{7}+1$.

解 $\sqrt{7}+1$.

拓展 平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足
$$\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \leqslant \left|\vec{a}\pm\vec{b}\right| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|,$$
这是对平面向量的和与差的长度进行估计的重要不等式.

10.3 红叶一先

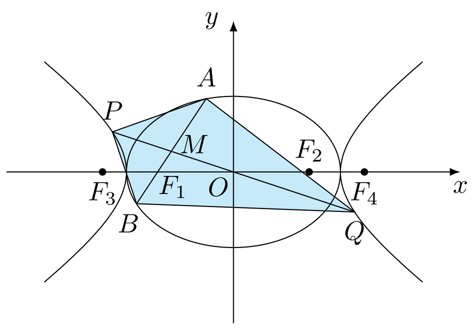
(湖南卷文科第 15 题) 若 $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)+ax$ 是偶函数，则 $a=$________.

分析 注意到
$$f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{3x+ax}+\mathrm{e}^{ax}\right)=\ln\left[\mathrm{e}^{(3+a)x}+\mathrm{e}^{ax}\right],$$
因此由 $3+a=-a$ 解得 $a=-\dfrac{3}{2}$.

解 $-\dfrac{3}{2}$

10.4 无巧不成书

理科第 21 题. 如图，O 为坐标原点，椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ，离心率为 e_1 ；双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_3,F_4 ，离心率为 e_2 . 已知 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，且 $|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$.



(1) 求 C_1,C_2 的方程;
(2) 过 F_1 作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB ，M 为弦 AB 的中点. 当直线 OM 与 C_2 交于 P,Q 两点时，求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.

分析 第 (1) 小题考查椭圆与双曲线的基本量与方程，是常规问题. 第 (2) 小题中，由于直线 AB 与直线 PQ 的斜率相关[1]，因此可以依托这一联系分别设出直线方程，然后分别与椭圆和双曲线联立，再利用弦长公式、点到直线的距离公式、韦达定理求解即可.

[1]详见『有心二次曲线的“垂径定理”』

解 (1) 根据题意，有

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}-1,$$

解得 $a=\sqrt{2}$ ，$b=1$ ，因此椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ，双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2) 解法一

设直线 $AB: x=my-1$ ，$A(x_1,y_1)$ ，$B(x_2,y_2)$ ，$P(x_3,y_3)$ ，$Q(x_4,y_4)$ ，显然有 $x_1+x_2\neq 0$.

由 $\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$ ，$\dfrac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$ 两式相减，并应用平方差公式可变形得

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2},$$

因此直线 OM 的斜率 $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{1}{2}m$ ，于是直线 PQ 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}mx$.

联立直线 AB 的方程与椭圆 C_1 的方程，可得

$$(m^2+2)y^2-2my-1=0.$$

联立直线 PQ 的方程与双曲线 C_2 的方程，可得

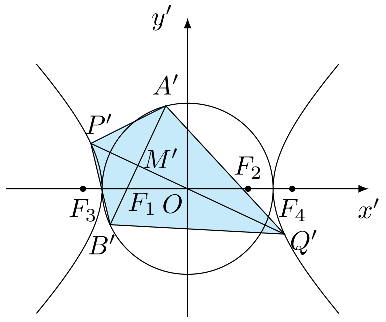
$$\left(2-m^2\right)x^2=4.$$

根据题意，记点 P,Q 到直线 AB 的距离分别为 $d(P,AB),d(Q,AB)$ ，则四边形 $APBQ$ 的面积

$$\begin{aligned}
S_{APBQ}&=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot[d(P,AB)+d(Q,AB)]\\
&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\left(\frac{|x_3-my_3+1|}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{|x_4-my_4+1|}{\sqrt{1+m^2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\frac{|x_3-x_4-m(y_3-y_4)|}{\sqrt{1+m^2}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\frac{\left|\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)(x_3-x_4)\right|}{\sqrt{1+m^2}}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{8(1+m^2)}}{m^2+2}\cdot\frac{2+m^2}{2\sqrt{1+m^2}}\cdot\frac{\sqrt{16(2-m^2)}}{|2-m^2|}\\
&=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{m^2+1}{2-m^2}}\\
&=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1+\frac{3}{2-m^2}}\\
&\geqslant 2,
\end{aligned}$$

等号当且仅当 $m=0$ 时取得．因此四边形 $APBQ$ 面积的最小值为 2 .

解法二



如图，作伸缩变换[1] $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\sqrt{2}y, \end{cases}$ 则椭圆变为圆 $x'^2+y'^2=2$，双曲线变为 $x'^2-y'^2=2$．

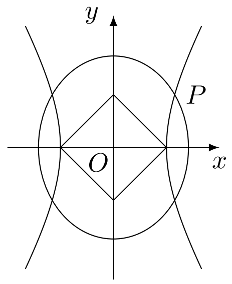
此时 $A'B' \perp P'Q'$，因此四边形 $A'P'B'Q'$ 的面积

$$S_{A'P'B'Q'}=\frac{1}{2}|A'B'|\cdot|P'Q'|,$$

当 $A'B' \perp x'$ 轴时，线段 $A'B'$ 和线段 $P'Q'$ 的长度同时取得最小值，从而此时 $S_{A'P'B'Q'}$ 最小，为 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$．于是四边形 $APBQ$ 面积的最小值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}=2$．

10.5 流连忘返

文科第 20 题． 如图，O 为坐标原点，双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1\,(a_1>0,b_1>0)$ 和椭圆 $C_2:\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{x^2}{b_2^2}=1\,(a_2>b_2>0)$ 均过点 $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$，且以 C_1 的两个顶点和 C_2 的两个焦点为顶点的四边形是面积为 2 的正方形．



(1) 求 C_1,C_2 的方程；

(2) 是否存在直线 l，使得 l 与 C_1 交于 A,B 两点，与 C_2 只有一个公共点，且 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$？证明你的结论．

分析 *第 (1) 小题考查双曲线与椭圆的基本量与方程，属于常规问题．第 (2) 小题需要准确的解读条件“$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$”并将其简单直接地表达出来，分析清楚在变化的过程中的不变量后就可以轻松作出判断了．*

解 (1) 根据题意有 $a_1=1$，$a_2^2-b_2^2=1$，且

$$\frac{1}{a_1^2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{1}{b_1^2}=1,\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=1,$$

[1]详见附录『仿射变换』

解得 $a_1=1$ ，$b_1=\sqrt{3}$ ，$a_2=\sqrt{3}$ ，$b_2=\sqrt{2}$.

因此双曲线 C_1 的方程为 $C_1: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ，椭圆 C_2 的方程为 $C_2: \dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{2}=1$.

(2) $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 即 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$ ，也即 $OA\perp OB$.

设 $A\left(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1\right)$ ，$B\left(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2\right)$ ，$\theta_2=\theta_1\pm\dfrac{\pi}{2}$ ，则

$$r_1^2\cos^2\theta_1-\frac{r_1^2\sin^2\theta_1}{3}=1, r_2^2\cos^2\theta_2-\frac{r_2^2\sin^2\theta_2}{3}=1,$$

即

$$\frac{1}{r_1^2}=\cos^2\theta_1-\frac{1}{3}\sin^2\theta_1, \frac{1}{r_2^2}=\sin^2\theta_1-\frac{1}{3}\cos^2\theta_1,$$

进而原点 O 到直线 AB 的距离 d 满足[1]

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{2}{3}.$$

因此直线 AB 必为圆 $x^2+y^2=\dfrac{3}{2}$ 的切线，而该圆在椭圆 $\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{2}=1$ 的内部，因此直线 AB 必与椭圆相交，于是不存在符合题意的直线 l .

10.6　太极生两仪

理科第 22 题.　已知常数 $a>0$ ，函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ，且 $f(x_1)+f(x_2)>0$ ，求 a 的取值范围.

分析　*第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性．第 (2) 小题先利用导函数研究函数的极值得到关于 a 的函数不等式后，通过换元简化，再利用导数研究与不等式相关的函数的单调性，之后解函数不等式即可.*

解　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{ax^2+4(a-1)}{(1+ax)(x+2)^2},$$

设 $h(x)=ax^2+4(a-1)$ ，则 $h(0)=4(a-1)$ ，因此按 a 与 1 的大小关系展开讨论.

当 $0<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个零点 $x=2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ ，进而函数 $f(x)$ 在 $\left(0,2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $a\geqslant 1$ 时，在区间 $(0,+\infty)$ 上恒有 $h(x)\geqslant 0$ ，因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增；当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

[1] 直角三角形斜边上的高的平方的倒数等于两条直角边的平方的倒数之和，这一性质可以利用面积法轻松证出.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点，则由第 (1) 小题的结果，对 $h(x)$ 有

$$\begin{cases} h\left(-\dfrac{1}{a}\right) > 0, \\ \Delta = -16a(a-1) > 0, \end{cases}$$

解得

$$0 < a < 1 \text{ 且 } a \neq \frac{1}{2},$$

此时可得两个极值点分别为 $2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ 与 $-2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$.
将两个极值点代入题中不等式的左边，可得

$$\begin{aligned} f(x_1)+f(x_2) &= \ln\left(1-2\sqrt{\frac{1-a}{a}}\cdot a\right) - \frac{2\cdot\left(-2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)}{-2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}+2} \\ &\quad + \ln\left(1+2\sqrt{\frac{1-a}{a}}\cdot a\right) - \frac{2\cdot 2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}}{2\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}+2} \\ &= \ln(2a-1)^2 + \frac{4(1-a)}{2a-1} \\ &= \ln(2a-1)^2 + \frac{2}{2a-1} - 2, \end{aligned}$$

令 $t=2a-1$ ，则 $-1<t<1$ 且 $t\neq 0$ ，不等式转化为

$$\ln t^2 + \frac{2}{t} - 2 > 0,$$

设左边函数为 $\varphi(t)$ ，则其导函数

$$\varphi'(t) = \frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t-1)}{t^2},$$

于是函数 $\varphi(t)$ 在区间 $(-1,0)$ 和区间 $(0,1)$ 上均为单调递减函数.
注意到 $\varphi(-1)=-4<0$ ，而 $\varphi(1)=0$ ，因此 t 的取值范围是 $(0,1)$ ，对应的 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

10.7 尽在掌握

文科第 **21** 题. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x+1\,(x>0)$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $i\,(i\in\mathbf{N}^*)$ 个零点, 证明: 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}<\dfrac{2}{3}$.

分析 *第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，属于常规问题；第 (2) 小题考查利用导函数研究函数的零点，根据零点的存在性定理判断各个零点所在的区间后进行裂项放缩即可证明结论.*

解 (1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x) = -x\sin x,$$

因此 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\big((2k+1)\pi,(2k+2)\pi\big)$，单调递减区间是 $\big(2k\pi,(2k+1)\pi\big)$，其中 $k\in\mathbf{N}$．
(2) 观察可得 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$，因此当 $n=1$ 时，命题成立．
接下来考虑 $n\geqslant 2$ 的情形．由于 $f(2k\pi)=2k\pi+1>0$，而 $f\big((2k+1)\pi\big)=-(2k+1)\pi+1<0$，其中 $k\in\mathbf{N}$．结合第 (1) 小题的结果，可得

$$(i-1)\pi<x_i<i\pi,i\in\mathbf{N}^*.$$

因此

$$\frac{1}{x_i^2}<\frac{1}{(i-1)^2\pi^2},i=2,3,\cdots,n,$$

累加可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}&<\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right]\\&<\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)}\right]\\&=\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\left[1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right]\\&=\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(2-\frac{1}{n-1}\right)\\&<\frac{4}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\\&<\frac{2}{3},\end{aligned}$$

综上，原不等式得证．

拓展　事实上，$x_{2k+1}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{N}$．可以利用这点使得不等式更加精细．

第十一章　江苏卷

11.1　齐次变形

第 14 题.　若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$ ，则 $\cos C$ 的最小值是________.

分析　由正弦定理，得 $a+\sqrt{2}b=2c$. 再由余弦定理可得

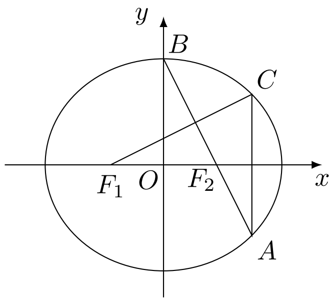
$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{4a^2+4b^2-(a+\sqrt{2}b)^2}{8ab}\\&=\frac{3a}{8b}+\frac{b}{4a}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\&\geqslant\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\dfrac{3a}{8b}=\dfrac{b}{4a}$ 时取得. 因此所求的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

解　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

11.2　暗藏勾股

第 17 题.　如图，在平面直角坐标系 xOy 中， F_1 ， F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，顶点 B 的坐标为 $(0,b)$ ，连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A ，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C ，连接 F_1C .



(1) 若点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ ，且 $BF_2=\sqrt{2}$ ，求椭圆的方程；
(2) 若 $F_1C\perp AB$ ，求椭圆离心率 e 的值.

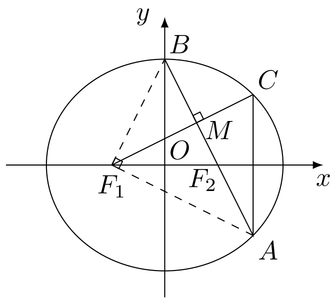
分析　第 *(1)* 小题考查椭圆的基本量与方程，第 *(2)* 小题需要借助平面几何知识将已知条件转移到与椭圆的基本量联系密切的位置，然后利用椭圆的定义通过解三角形解决.

解 (1) 根据题意，$BF_2=a=\sqrt{2}$，又

$$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=1,$$

从而 $b=1$，因此椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2) 如图，连接 BF_1 ， AF_1 .



记 $\angle F_1BO=\theta$，则 $\angle OBF_2=\angle OF_1M=\angle AF_1F_2=\theta$，于是

$$\angle BF_1A=\angle BF_1M+2\theta=90^\circ.$$

在直角三角形 ABF_1 中,设 $AF_2=m$,则 $BF_1=a$, $BA=BF_2+AF_2=a+m$, $AF_1=2a-AF_2=2a-m$,由勾股定理得

$$AB^2=AF_1^2+BF_1^2,$$

从而

$$(a+m)^2=(2a-m)^2+a^2,$$

解得 $m=\dfrac{2}{3}a$，因此 $\cos 2\theta=\dfrac{BF_1}{BA}=\dfrac{3}{5}$，进而

$$e=\frac{c}{a}=\frac{OF_1}{BF_1}=\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

11.3 一决高下

第 19 题. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数.

(1) 证明：$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；

(2) 若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}+m-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3) 已知正数 a 满足：存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<a\left(-x_0^3+3x_0\right)$ 成立. 试比较 e^{a-1} 与 $a^{\mathrm{e}-1}$ 的大小，并证明你的结论.

分析 第 (1) 小题考查函数奇偶性的概念. 第 (2) 小题考查不等式的恒成立问题，可以分离变量后转化为最值问题解决. 第 (3) 小题先处理一个存在性问题，然后通过作差构造函数，研究函数的图象与性质就可以通过函数值的正负判断需要比较的代数式的大小关系.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，对任意 $x\in\mathbf{R}$ ，有

$$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}=f(x),$$

因此 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数．

(2) 根据题意，有

$$\forall x\in(0,+\infty), m\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\leqslant \mathrm{e}^{-x}+m-1,$$

令 $\mathrm{e}^{x}=t$ ，则

$$\forall t>1, m\left(t+\frac{1}{t}\right)\leqslant\frac{1}{t}+m-1,$$

即

$$\forall t>1, m\leqslant\frac{1-t}{t^2-t+1},$$

根据均值不等式，有

$$\frac{1-t}{t^2-t+1}=-\frac{1}{t-1+\dfrac{1}{t-1}+1}\geqslant-\frac{1}{3},$$

等号当 $t=2$ 时取得．因此 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$ ．

(3) 先确定 a 的取值范围．根据题意有

$$\exists x\geqslant 1, \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}<a(-x^3+3x),$$

即

$$\exists x\geqslant 1, \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+ax^3-3ax<0,$$

令上述命题中不等式左侧函数为 $g(x)$ ，则函数 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+3a(x^2-1),$$

因此在区间 $[1,+\infty)$ 上，$g'(x)\geqslant 0$ ，因此 $g(x)$ 单调递增，于是由题意可知

$$g(1)=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2a<0,$$

解得 $a>\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}$ ．

接下来比较 e^{a-1} 与 $a^{\mathrm{e}-1}$ 的大小，只需要比较 $a-1$ 和 $(\mathrm{e}-1)\ln a$ 的大小．记

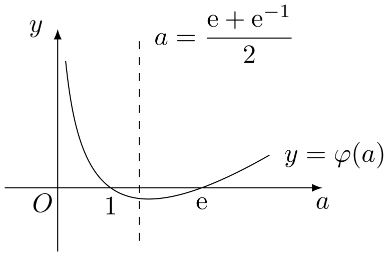
$$\varphi(a)=a-1-(\mathrm{e}-1)\ln a,$$

则其导函数

$$\varphi'(a)=\frac{a-(\mathrm{e}-1)}{a},$$

因此在 $(0,\mathrm{e}-1)$ 上函数 $\varphi(a)$ 单调递减，在 $(\mathrm{e}-1,+\infty)$ 上，函数 $\varphi(a)$ 单调递增，又注意到 $\varphi(1)=\varphi(\mathrm{e})=0$ ，因此当 $a\in\left(\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2},\mathrm{e}\right)$ 时，$\mathrm{e}^{a-1}<a^{\mathrm{e}-1}$ ；当 $a=\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{e}^{a-1}=a^{\mathrm{e}-1}$ ；当 $a\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，

$e^{a-1} > a^{e-1}$.



11.4 探索与发现

第 20 题. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是"H 数列".

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 证明: $\{a_n\}$ 是"H 数列";

(2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1 = 1$, 公差 $d < 0$. 若 $\{a_n\}$ 是"H 数列", 求 d 的值;

(3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个"H 数列" $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n\,(n \in \mathbf{N}^*)$ 成立.

分析 *第 (1) 小题直接按照"H 数列"的定义证明即可. 第 (2) 小题中对核心条件 $S_n = a_m$ 进行代数变形, 考虑边界条件就可以确定 d 的取值. 第 (3) 小题在第 (2) 小题的基础上, 对 $a_1 = -d$ 的情形进行扩充, 可得 $a_1 = kd$, 其中 $k = -1, 0, 1, 2, \cdots$ 时的等差数列均为"H 数列", 然后对等差数列 $\{a_n\}$ 的通项稍加变形即得.*

解 (1) 若数列 $S_n = 2^n\,(\,n \in \mathbf{N}^*\,)$, 则

$$a_n = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ 2^{n-1}, & n \geqslant 2, \end{cases}$$

因此对任意正整数 n , 均有

$$S_n = 2^n = a_{n+1},$$

因此数列 $\{a_n\}$ 是"H 数列".

(2) 根据题意, 对任意正整数 n , 存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 即

$$na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = a_1 + (m-1)d,$$

也即

$$m = 1 + \frac{n-1}{d} + \frac{n(n-1)}{2},$$

取 $n = 2$, 则有

$$m = 2 + \frac{1}{d}, \text{ 即 } d = \frac{1}{m-2},$$

而 m 是正整数, $d < 0$, 因此 $d = -1$.

而当 $d=-1$ 时，对任意正整数 n ，均存在正整数

$$m=2-n+\frac{n(n-1)}{2}$$

使得 $S_n=a_m$ ，因此 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

综上，d 的值为 -1 .

(3) 与第 (2) 小题类似，可得对公差为 d 的等差数列 $\{x_n\}$ 而言，$S_n=a_m$ 成立等价于

$$m=1+\frac{(n-1)x_1}{d}+\frac{n(n-1)}{2},$$

因此当 $x_1=0$ 或 $x_1=d$ 时，$\{x_n\}$ 均为“H 数列”，也即数列 $\{nd\}$ 和数列 $\{(n-1)d\}$ 均为“H 数列”.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d_0 ，则

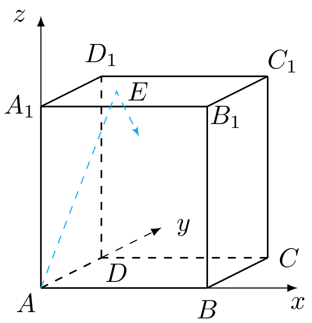
$$a_n=a_1+(n-1)d_0=n\cdot a_1+(n-1)\cdot(d_0-a_1),$$

而数列 $\{n\cdot a_1\}$ 和数列 $\{(n-1)\cdot(d_0-a_1)\}$ 均为“H 数列”，因此原命题得证.

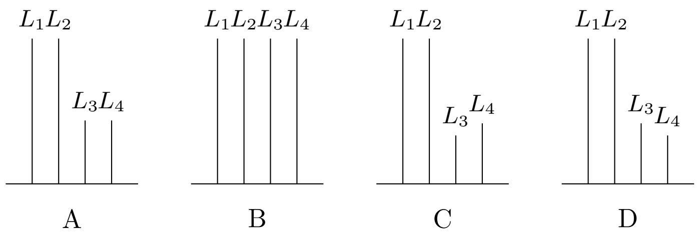
第十二章　江西卷

12.1　台球桌上的几何

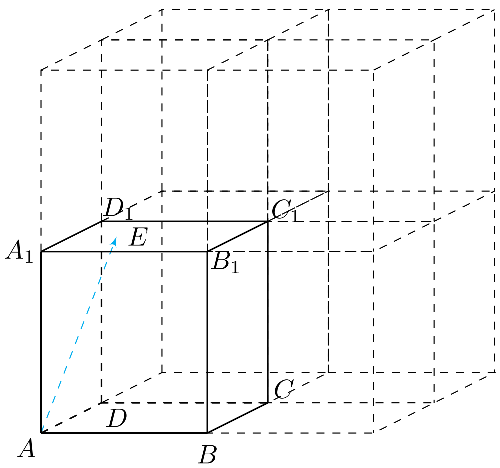
理科第 10 题.　如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=11$，$AD=7$，$AA_1=12$，一质点从顶点 A 射向点 $E(4,3,12)$，遇长方体的面反射 (反射服从光的反射原理).



将第 $i-1$ 次到第 i 次反射点之间的线段记为 $L_i\,(i=2,3,4)$，$L_1=AE$，将线段 L_1,L_2,L_3,L_4 竖直放置在同一水平线上，则大致的图形是 (　　)

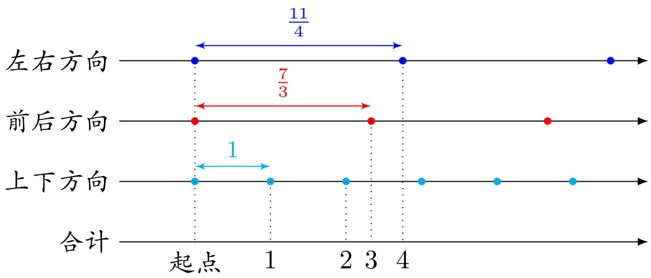


分析　将长方体无限拓展出去，如图.



将每个面想象成一个薄膜，让沿 $\overrightarrow{AE}$ 出发的质点沿直线匀速运动并穿透这些薄膜，那么根据反射原理，长方体内的每个反射点都与空间中质点穿透薄膜的位置一一对应 (类比于物理中画光的反射光线的方法).

假设每过 1 单位时间，质点位移均为 $\overrightarrow{AE}=(4,3,12)$. 对于左右方向的薄膜，每过 $\dfrac{11}{4}$ 单位时间均有一个薄膜被穿透；对于前后方面的薄膜，每过 $\dfrac{7}{3}$ 单位时间均有一个薄膜被穿透；对于上下方向的薄膜，每过 1 单位均有一个薄膜被穿透. 将这些被穿透的位置按时间序列整理，如图.

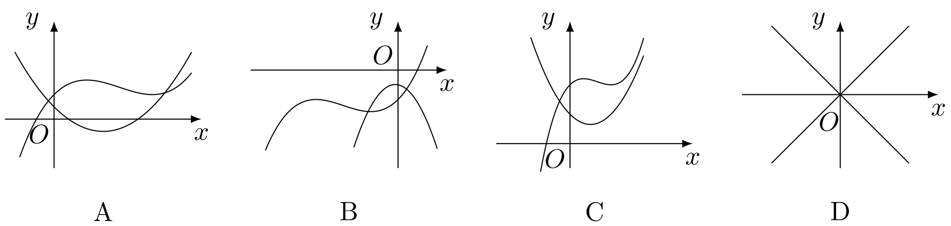


因此 $L_1=L_2=1$, $L_3=\dfrac{7}{3}-2=\dfrac{1}{3}$, $L_4=\dfrac{11}{4}-\dfrac{7}{3}=\dfrac{5}{12}$ (以 $\overrightarrow{AE}$ 的长度为单位).

解　C

12.2　两兔傍地走

文科第 10 题.　在同一直角坐标系中，函数 $y=ax^2-x+\dfrac{a}{2}$ 与 $y=a^2x^3-2ax^2+x+a\,(a\in\mathbf{R})$ 的图象不可能的是 (　　)



分析 当 $a=0$ 时，题中的两个函数分别为 $y=-x$ 和 $y=x$, 因此图象如选项 D 所示.

当 $a\neq 0$ 时，函数 $y=ax^2-x+\dfrac{a}{2}$ 的对称轴为 $x=\dfrac{1}{2a}$, 而函数 $y=a^2x^3-2ax^2+x+a$ 的导函数为

$$y'=3a^2x^2-4ax+1=(3ax-1)(ax-1),$$

因此有极值点 $x=\dfrac{1}{3a}$ 和 $x=\dfrac{1}{a}$. 无论 a 取何值，$\dfrac{1}{2a}$ 必然在 $\dfrac{1}{3a}$ 和 $\dfrac{1}{a}$ 之间，选项 B 不符合此规律.

解　B

12.3　借刀杀人

理科第 15 题.　过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，若 M 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率等于________.

分析 根据椭圆的“垂径定理”[1]，有

$$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2},$$

于是 $-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$，即 $a^2=2b^2$，进而可得

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12.4 狐假虎威

文科第 15 题. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，若 $|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\leqslant 2$，则 $x+y$ 的取值范围为________.

分析 由 $|x|+|x-1|\geqslant|x-(x-1)|=1$ 及 $|y|+|y-1|\geqslant|y-(y-1)|=1$ 可得

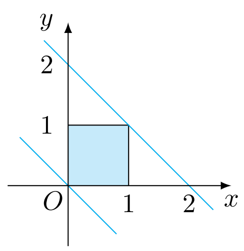
$$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\geqslant 2,$$

等号当且仅当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时取得.

根据已知 $|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\leqslant 2$，因此 $|x|+|y|+|x-1|+|y-1|=2$，即

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

利用线性规划，可得 $x+y$ 的取值范围是 $[0,2]$，如图.

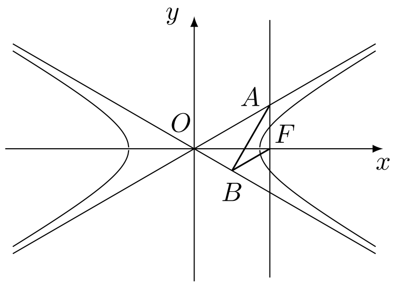


解 $[0,2]$

12.5 第二定义

理科第 20 题. 如图，已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$ 的右焦点为 F. 点 A，B 分别在 C 的两条渐近线上，$AF\perp x$ 轴，$AB\perp OB$，$BF\parallel OA$（O 为坐标原点）.

[1]详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』



(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过 C 上一点 $P(x_0,y_0)\,(y_0\neq 0)$ 的直线 $l:\dfrac{x_0x}{a^2}-y_0y=1$，与直线 AF 相交于点 M，与直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 相交于点 N. 证明: 当点 P 在 C 上移动时，$\dfrac{|MF|}{|NF|}$ 恒为定值，并求此定值.

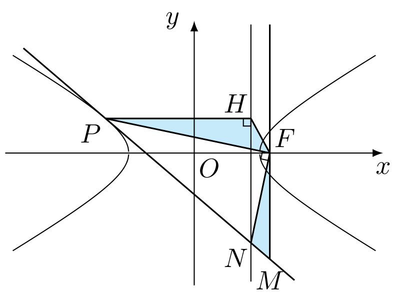
分析 第 (1) 小题考查双曲线的基本量与方程，注意将题中的几何条件联系起来可以简化运算. 第 (2) 小题实际上是圆锥曲线的一个优美的统一性质的变形.

解 (1) 设直线 AF 与双曲线的另一条渐近线交于点 E，则由双曲线的对称性知 F 平分 AE，又 $BF\parallel OA$，于是 B 平分 OE，而 $AB\perp OB$，因此 $\triangle OAE$ 中，$AO=AE$. 又由双曲线的对称性，有 $OA=OE$，因此三角形 OAE 为正三角形[1]，从而有

$$\frac{1}{a}=\tan\angle AOF=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得 $a=\sqrt{3}$，因此双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2) 如图，过 P 作直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 的垂线，垂足为 H，连接 PF，FH.



由于直线 $l:\dfrac{x_0x}{3}-y_0y=1$，于是可以解得 $N\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{x_0-2}{2y_0}\right)$，因此

$$\overrightarrow{FN}\cdot\overrightarrow{FP}=\left(-\frac{1}{2},\frac{x_0-2}{2y_0}\right)\cdot(x_0-2,y_0)=0,$$

因此 $\angle PFN=\angle PHN=90^\circ$，于是 P,H,F,N 四点共圆，进而

$$\angle FPH=\angle FNH=\angle NFM,\angle PFH=\angle PNH=\angle PMF,$$

于是 $\triangle PFH$ 与 $\triangle FMN$ 相似，因此

$$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{|PF|}{|PH|}.$$

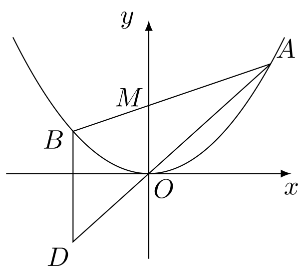
[1]也可以利用 O,A,F,B 四点共圆推出 $\angle AOF=\angle BOF=\angle ABF=\angle OAB=30^\circ$

由双曲线的第二定义，$\dfrac{|PF|}{|PH|}$ 为双曲线 C 的离心率 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，因此当点 P 在 C 上移动时，$\dfrac{|MF|}{|NF|}$ 恒为定值 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

拓展　一般地，双曲线上任意一点 P 处的切线与某条准线交于 M，对应的焦点设为 F，则 $\angle PFM$ 为直角．这一结论对椭圆和抛物线依然成立．

12.6　按部就班

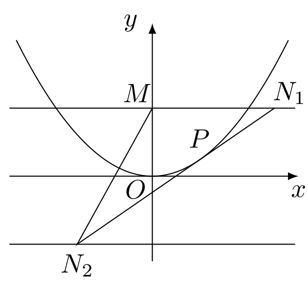
文科第 **20** 题．　如图，已知抛物线 $C: x^2=4y$，过点 $M(0,2)$ 任作一直线与 C 相交于 A，B 两点，过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D (O 为坐标原点)．



(1) 证明：动点 D 在定直线上；
(2) 作 C 的任意一条切线 l (不含 x 轴) 与直线 $y=2$ 相交于点 N_1，与 (1) 中的定直线相交于点 N_2，证明：$|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值，并求此定值．

分析　*第 (1) 小题是典型的轨迹问题，适当引入参数表达条件即可．第 (2) 小题考查直线与抛物线的位置关系，表达出抛物线的切线[1]后按部就班的求相关各点的坐标，再代入求值即可．*

解　(1) 设 $A(4t_1,4t_1^2)$，$B(4t_2,4t_2^2)$，$D(4t_2,m)$.
由于 A,M,B 三点共线，从而
$$\frac{4t_1^2-2}{4t_1-0}=\frac{4t_2^2-2}{4t_2-0},$$
整理可得 $t_1t_2=-\dfrac{1}{2}$.
由于 A,O,D 三点共线，从而
$$\frac{4t_1^2}{4t_1}=\frac{m}{4t_2},$$
于是 $m=4t_1t_2=-2$ 为定值，因此动点 D 在定直线 $y=-2$ 上．
(2) 根据题意，作示意图．



[1]详见『圆锥曲线的切线方程』

设 $P(4t,4t^2)$，则抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 在 $x=4t$ 处的切线方程为

$$y=2t(x-4t)+4t^2,$$

即 $y=2tx-4t^2$.

分别与直线 $y=2$ 和 $y=-2$ 联立，可得 $N_1\left(2t+\dfrac{1}{t},2\right)$， $N_2\left(2t-\dfrac{1}{t},-2\right)$，因此

$$|MN_2|^2-|MN_1|^2=\left(2t-\frac{1}{t}\right)^2+16-\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2=8,$$

因此 $|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值 8 .

12.7 平分秋色

理科第 21 题. 随机将 $1,2,\cdots,2n$ $(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$ 这 $2n$ 个连续正整数分成 A ， B 两组，每组 n 个数，A 组最小数为 a_1 ，最大数为 a_2 ； B 组最小数为 b_1 ，最大数为 b_2 ，记 $\xi=a_2-a_1$ ， $\eta=b_2-b_1$.
(1) 当 $n=3$ 时，求 ξ 的分布列和数学期望;
(2) 令 C 表示事件“ξ 与 η 的取值恰好相等”，求事件 C 发生的概率 $P(C)$;
(3) 对 (2) 中的事件 C ， $\overline{C}$ 表示 C 的对立事件，判断 $P(C)$ 和 $P\left(\overline{C}\right)$ 的大小关系，并说明理由.

分析 *第 (1) 小题直接列举即可，第 (2) 小题需要构造性的计算事件空间，第 (3) 小题在第 (2) 小题的基础上大胆放缩即可得到.*

解 (1) 列举可得 ξ 的分布列为

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

所求的数学期望为 $\dfrac{1}{5}\cdot 2+\dfrac{3}{10}\cdot 3+\dfrac{3}{10}\cdot 4+\dfrac{1}{5}\cdot 5=\dfrac{7}{2}$.
(2) 基本事件总数为 C_{2n}^{n} ，接下来计算事件空间包含的基本事件数.

ξ 与 η 的取值恰好相等的情形可以这样构造:

第一类，A 从 1 取到 n ，或者 B 从 1 取到 n ，共 2 种分组方法;

第二类，将 $1,2,\cdots,2n$ 分成 3 段，第一段为 $1,2,\cdots,k$ ，第二段为 $k+1,\cdots,2n-k$ ，第三段为 $2n-k+1,\cdots,2n$ ，其中 $k\leqslant n-1$. 接下来通过四步完成分配:

第一步，将第一段全部分配给 A ，将第三段全部分配给 B ;

第二步，将中间一段中的第一个数分配给 B ，最后一个数分配给 A ;

第三步，将中间一段剩下的 $2n-2k-2$ 个数平均分成两组，分别分配给 A 和 B ;

第四步，在前面三步得到的分配方法的基础上，再交换 A 组和 B 组的所有数，得到新的分配方法 (相当于加倍).

综上，使 ξ 与 η 的取值恰好相等的所有可能的分配方法数为

$$2+2\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_{2n-2k-2}^{n-k-1}，即 2\left(1+\sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{C}_{2k}^{k}\right),$$

其中定义 $\mathrm{C}_0^0=1$．因此所求的概率为

$$P(C)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & n=2,\\ \dfrac{2}{\mathrm{C}_{2n}^{n}}\cdot\left(2+\sum\limits_{k=1}^{n-2}\mathrm{C}_{2k}^{k}\right), & n\geqslant 3.\end{cases}$$

(3) 由于 $P(C)+P(\overline{C})=1$，因此只需要比较 $P(C)$ 与 $\dfrac{1}{2}$ 的大小关系即可．

当 $n=2,3,4,5$ 时，$P(C)$ 的值分别为 $\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{7},\dfrac{5}{21}$，因此当 $n=2$ 时，$P(C)>P(\overline{C})$，猜想当 $n\geqslant 3$ 时，$P(C)<P(\overline{C})$，下面证明这一结论．

当 $n\geqslant 3$ 时，只需要证明

$$4\left(2+\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_4^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n-4}^{n-2}\right)<\mathrm{C}_{2n}^{n}.$$

用数学归纳法，当 $n=3$ 时，命题显然成立．

假设当 $n=k$ ($k\geqslant 3$ 且 k 为正整数) 时命题成立，即

$$4\left(2+\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_4^2+\cdots+\mathrm{C}_{2k-4}^{k-2}\right)<\mathrm{C}_{2k}^{k},$$

那么当 $n=k+1$ 时，只需要证明

$$4\mathrm{C}_{2k-2}^{k-1}\leqslant \mathrm{C}_{2k+2}^{k+1}-\mathrm{C}_{2k}^{k},$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}&=\mathrm{C}_{2n+1}^{n}+\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}\\&=\mathrm{C}_{2n}^{n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{n}+\mathrm{C}_{2n}^{n}+\mathrm{C}_{2n}^{n+1}\\&=\mathrm{C}_{2n}^{n}+\left(\mathrm{C}_{2n-1}^{n-2}+\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}\right)+\left(\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}+\mathrm{C}_{2n-1}^{n}\right)+\left(\mathrm{C}_{2n-1}^{n}+\mathrm{C}_{2n-1}^{n+1}\right)\\&>\mathrm{C}_{2n}^{n}+2\left(\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}+\mathrm{C}_{2n-1}^{n}\right)\\&>\mathrm{C}_{2n}^{n}+4\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1},\end{aligned}$$

因此命题在 $n=k+1$ 时仍然成立．

综上，欲证结论得证．

因此当 $n=2$ 时，$P(C)>P(\overline{C})$；当 $n\geqslant 3$ 时，$P(C)<P(\overline{C})$．

12.8　八九不离十

文科第 **21** 题．　将连续正整数 $1,2,\cdots,n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 从小到大排列构成一个数 $123\cdots n$，$F(n)$ 为这个数的位数 (如 $n=12$ 时，此数为 123456789101112，共有 15 个数字，$F(12)=15$)，现从这个数中随机取一个数字，$p(n)$ 为恰好取到 0 的概率．

(1) 求 $p(100)$；

(2) 当 $n \leqslant 2014$ 时，求 $F(n)$ 的表达式；

(3) 令 $g(n)$ 为这个数中数字 0 的个数，$f(n)$ 为这个数中数字 9 的个数，$h(n)=f(n)-g(n)$，$S=\{n \mid h(n)=1, n \leqslant 100, n \in \mathbf{N}^*\}$，求当 $n \in S$ 时 $p(n)$ 的最大值.

分析 第 (1) 小题考查对新定义的理解. 第 (2) 小题考查面对复杂问题的分类讨论能力，同时为第 (3) 小题铺路. 第 (3) 小题给出了集合 S 的定义，实际上就是研究 $9,0$ 的分布情况，只要注意观察其规律，就可以很快解决问题.

解 (1) 按 $F(n)$ 的定义，当 $n=100$ 时可得

$$F(100)=9\times 1+90\times 2+1\times 3=192.$$

而其中 0 出现的位置有 $10,20,\cdots,90,100$，共 11 个，因此按照 $p(n)$ 的定义，有

$$p(100)=\frac{11}{F(100)}=\frac{11}{192}.$$

(2) 需要将 n 按分界点 $10,100,1000$ 展开讨论.

$F(1),F(2),\cdots,F(9)$ 构成以 $F(1)=1$ 为首项，1 为公差的等差数列，通项为

$$F(n)=n, n=1,2,\cdots,9;$$

$F(10),F(11),\cdots,F(99)$ 构成以 $F(10)=F(9)+2=11$ 为首项，2 为公差的等差数列，通项为

$$F(n)=2n-9, n=10,11,\cdots,99;$$

$F(100),F(101),\cdots,F(999)$ 构成以 $F(100)=F(99)+3=192$ 为首项，3 为公差的等差数列，通项为

$$F(n)=3n-108, n=100,101,\cdots,999;$$

$F(1000),F(1001),\cdots,F(2014)$ 构成以 $F(1000)=F(999)+4=2893$ 为首项，4 为公差的等差数列，通项为

$$F(n)=4n-1107, n=1000,1001,\cdots,2014.$$

因此，$F(n)$ 的表达式为

$$F(n)=\begin{cases} n, 1\leqslant n\leqslant 9,\\ 2n-9, 10\leqslant n\leqslant 99,\\ 3n-108, 100\leqslant n\leqslant 999,\\ 4n-1107, 1000\leqslant n\leqslant 2014.\end{cases}$$

(3) 先求集合 S. 将 $1,2,\cdots,100$ 排成一个序列，可知在 89 之前 9 和 0 出现的位置总是相邻的 (如

“2930”)，而在 90 (不包含 90) 之后，9 的个数比 0 的个数至少多 2，如下：

$$\cdots 910 \cdots 1920 \cdots 2930 \cdots 899091 \cdots 99100,$$

因此可得

$$S=\{9,19,29,\cdots,89,90\}.$$

当 $n=9$ 时，显然有 $p(9)=0$；

当 $n=10k+9$ ($k=1,2,\cdots,8$) 时，由第 (2) 小题的结果可得 $F(n)=20k+9$，而排列构成的数中包含 k 个 0，因此

$$p(n)=\frac{k}{20k+9}=\frac{1}{20+\dfrac{9}{k}}\leqslant\frac{8}{169};$$

当 $n=90$ 时，由第 (2) 小题的结果可得 $F(90)=171$，而排列构成的数中包含 9 个 0，因此

$$p(90)=\frac{9}{171}=\frac{1}{19};$$

综上，当 $n\in S$ 时，$p(n)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{19}$，当 $n=90$ 时取得.

第十三章 辽宁卷

13.1 值域长度

理科第 12 题． 已知定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

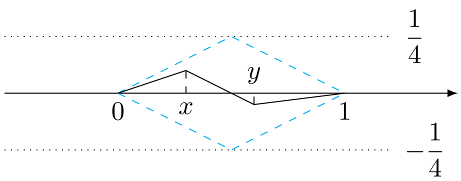
① $f(0)=f(1)=0$；

② 对所有 $x,y\in[0,1]$，且 $x\neq y$，有 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}|x-y|$．

若对所有满足条件的 $f(x)$，均有对任意[1] $x,y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<k$ 恒成立，则 k 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2\pi}$　　D. $\frac{1}{8}$

分析 题意即函数在区间 $[0,1]$ 端点处的函数值相等（均为 0）且函数值的变化率的绝对值小于 $\frac{1}{2}$，求满足该条件的函数 $f(x)$ 的值域长度的最大值．



如图，当函数 $f(x)$ 无限接近

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}(1-x), \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

时，$f(x)$ 的值域长度无限接近 $\frac{1}{4}$，因此 $k\geqslant\frac{1}{4}$．

下面证明当 $k=\frac{1}{4}$ 时符合题意．

若 $x=y$，则显然有 $\forall x,y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<k$；

若 $x\neq y$，对任意 $x,y\in[0,1]$，不妨设 $x<y$，有

$$\begin{aligned}2|f(x)-f(y)|&\leqslant|f(x)-f(0)|+|f(x)-f(y)|+|f(1)-f(y)|\\&<\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(y-x)+\frac{1}{2}(1-y)\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此 $|f(x)-f(y)|<k$，符合题意．

综上，k 的最小值为 $\frac{1}{4}$．

[1] 由于原题题意较为晦涩，此处做了修改．另外条件 $f(0)=f(1)=0$ 可以削弱为 $f(0)=f(1)$

解 B

13.2 分离变量

文科第 12 题. 当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ( )

A. $[-5,-3]$ B. $\left[-6,-\dfrac{9}{8}\right]$ C. $[-6,-2]$ D. $[-4,-3]$

分析 题意即[1] $\forall x\in[-2,1], ax^3\geqslant x^2-4x-3$，令

$$f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3},$$

则上述命题等价于

$$\forall x\in[-2,0), a\leqslant f(x),\ \text{且}\ \forall x\in(0,1], a\geqslant f(x),$$

换元 $t=\dfrac{1}{x}$，且 $h(t)=3t^3+4t^2-t$，则命题可以得到进一步的简化：

$$\forall t\leqslant -\frac{1}{2}, -a\geqslant h(t),\ \text{且}\ \forall t\geqslant 1, -a\leqslant h(t).$$

函数 $h(t)$ 的导函数

$$h'(t)=9t^2+8t-1=(t+1)(9t-1),$$

因此函数 $h(t)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $\left(-1,\dfrac{1}{9}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{9},+\infty\right)$ 上单调递增. 因此 $h(t)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ 上的最大值为 $h(-1)=2$，在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 $h(1)=6$，从而 $-a\geqslant 2$ 且 $-a\leqslant 6$，进而可得 a 的取值范围是 $[-6,-2]$.

解 C

13.3 凡事预则立

理科第 16 题. 对于 $c>0$，当非零实数 a,b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时，$\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值为________.

分析 我们希望通过将 $4a^2-2ab+4b^2=c$ 配方成

$$\lambda(2a+b)^2+(\cdots)^2=c$$

的形式来探索何时 $|2a+b|$ 最大. 为此，只需要 $c-\lambda(2a+b)^2$ 即

$$(4-4\lambda)a^2+(-2-4\lambda)ab+(4-\lambda)b^2$$

[1] 详见附录『分离变量法』

的判别式 (视 a 为主元)

$$\Delta=12b^2(8\lambda-5)=0,$$

即 $\lambda=\dfrac{5}{8}$.

因此有

$$\frac{5}{8}(2a+b)^2+\frac{3}{2}\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2=c,$$

因此当 $a=\dfrac{3}{2}b$ 时 $|2a+b|$ 取得最大值，此时可得 $c=10b^2$.

将 $a=\dfrac{3}{2}b$ 和 $c=10b^2$ 代入，可得

$$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2}-2\cdot\frac{1}{b}\geqslant -2,$$

当且仅当 $\dfrac{1}{b}=2$ 时取得等号.

解　-2

文科第 **16** 题.　对于 $c>0$，当非零实数 a，b 满足 $4a^2-2ab+b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{4}{c}$ 的最小值为________.

分析 我们希望通过将 $4a^2-2ab+b^2=c$ 配方成

$$\lambda(2a+b)^2+(\cdots)^2=c$$

的形式来探索何时 $|2a+b|$ 最大. 为此，只需要 $c-\lambda(2a+b)^2$ 即

$$(4-4\lambda)a^2+(-2-4\lambda)ab+(1-\lambda)b^2$$

的判别式 (视 a 为主元)

$$\Delta=12b^2(4\lambda-1)=0,$$

即 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

因此有

$$\frac{1}{4}(2a+b)^2+3\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2=c,$$

因此当 $b=2a$ 时 $|2a+b|$ 取得最大值，此时可得 $c=4a^2$.

将 $b=2a$ 和 $c=4a^2$ 代入，可得

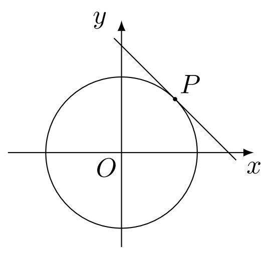
$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=\frac{1}{a^2}+2\cdot\frac{1}{a}\geqslant -1,$$

当且仅当 $\dfrac{1}{a}=-1$ 时取得等号.

解　-1

13.4 倒转乾坤

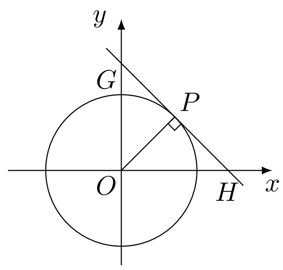
理科第 20 题． 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴，y 轴正半轴围成一个三角形，当该三角形面积最小时，切点为 P（如图），双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$．



(1) 求 C_1 的方程；
(2) 椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点，直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A，B 两点，若以线段 AB 为直径的圆过点 P，求 l 的方程．

分析 *第 (1) 小题考查直线与圆的位置关系，以及双曲线的基本量与方程．第 (2) 小题中如何简单有效地处理 $AP\perp BP$ 是解决问题的关键．*

解 (1) 根据题意，设切线与 x,y 轴的交点分别为 H,G，与 x 轴的夹角 $\angle OHP$ 为 θ，如图．



直角三角形 OGH 的面积为

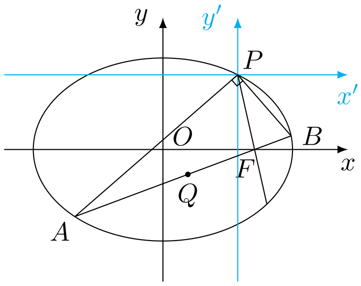
$$\frac{1}{2}\cdot(GP+PH)\cdot OP=\frac{1}{2}\left(2\tan\theta+\frac{2}{\tan\theta}\right)\cdot OP=2\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)\geqslant 4,$$

等号当且仅当 $\tan\theta=1$ 时取得，此时 $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$．
双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$，于是

$$\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1,\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{3},$$

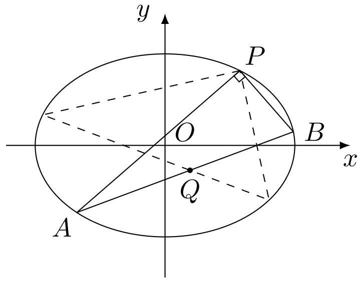
解得 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，于是双曲线 C_1 的方程为 $C_1:x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$．

(2) 根据题意，椭圆 C_2 的方程为 $C_2:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$．以 AB 为直径的圆过 P，因此直线 AB 过点 P 或者线段 AB 对 P 点的张角为直角．

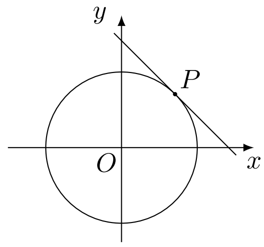


以 P 为原点，以原来的坐标轴方向为新的坐标轴方向重新建立平面直角坐标系 $x'Py'$，则新坐标系下的椭圆方程为
$$\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{6}+\frac{(y'+\sqrt{2})^2}{3}=1.$$
整理得
$$\frac{1}{6}x'^2+\frac{1}{3}y'^2+\frac{\sqrt{2}}{3}x'+\frac{2\sqrt{2}}{3}y'=0.$$
设直线 $mx'+ny'=1$ 被椭圆截得的弦对 P 的张角为直角，则化齐次联立，有
$$\frac{1}{6}x'^2+\frac{1}{3}y'^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x'+\frac{2\sqrt{2}}{3}y'\right)\cdot(mx'+ny')=0.$$
从而有
$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}n\right)\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}n+\frac{2\sqrt{2}}{3}m\right)\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}m=0.$$
根据题意，$PA\perp PB$，于是该方程的两根之积为 -1，即
$$\frac{\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}m}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}n}=-1,$$
整理得
$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}m-\frac{4\sqrt{2}}{3}n=1,$$
因此该直线恒过新坐标系的点 $Q\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$，也即旧坐标系下的 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.
此时可知直线 QF 和直线 PF 的方程为所求，结合 $F(\sqrt{3},0)$ 可得 l 的方程为
$$x-\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-1\right)y-\sqrt{3}=0\text{ 或 }x+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)y-\sqrt{3}=0.$$

拓展　设 P 为椭圆上一点，对点 P 的张角为直角的椭圆的弦过定点，如图.



文科第 20 题． 圆 $x^2+y^2=4$ 的切线与 x 轴正半轴，y 轴正半轴围成一个三角形，当该三角形面积最小时，切点为 P（如图）．



(1) 求点 P 的坐标；

(2) 焦点在 x 轴上的椭圆 C 过点 P，且与直线 $l: y=x+\sqrt{3}$ 交于 A,B 两点，若 $\triangle PAB$ 的面积为 2，求 C 的标准方程．

分析 第 *(1)* 小题考查直线与圆的位置关系，需要用均值不等式确定三角形面积最小时对应的参数值．第 *(2)* 小题是通过直线与椭圆位置关系求三角形面积的问题，而未知数设置在椭圆的参数处增加了问题的难度，合理的设出椭圆方程可以简化运算．

解 (1) 参考理科第 20 题第 (1) 小题，P 的坐标是 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$．

(2) 设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1\,(\,0<m<n\,)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

由于椭圆 C 过点 P，因此 $m\cdot(\sqrt{2})^2+n\cdot(\sqrt{2})^2=1$，即 $m+n=\dfrac{1}{2}$．

联立直线 $y=x+\sqrt{3}$ 与椭圆 $C: mx^2+ny^2=1$，可得

$$(m+n)x^2+2\sqrt{3}nx+3n-1=0,\ 即\ \frac{1}{2}x^2+2\sqrt{3}nx+3n-1=0,$$

因此

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{(2\sqrt{3}n)^2-4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(3n-1)}}{\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{12n^2-6n+2}.$$

另一方面，用底边 AB 和 AB 上的高计算 $\triangle PAB$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+1^2}\cdot|x_1-x_2|\cdot\frac{|\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2,$$

解得 $|x_1-x_2|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

这样就有

$$|x_1-x_2|=2\sqrt{12n^2-6n+2}=\frac{4\sqrt{3}}{3},$$

即

$$18n^2-9n+1=0,$$

解得 $n=\dfrac{1}{3}$（舍去 $n=\dfrac{1}{6}$），进而 $m=\dfrac{1}{6}$，因此椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

13.5　清君侧，靖国难

理科第 21 题．　已知函数

$$f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\frac{8}{3}(\sin x+1),$$
$$g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(1+\sin x)\ln\left(3-\frac{2x}{\pi}\right).$$

(1) 证明：存在唯一 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $f(x_0)=0$；
(2) 证明：存在唯一 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使 $g(x_1)=0$，且对 (1) 中的 x_0，有 $x_0+x_1<\pi$．

分析　*第 (1) 小题考查利用导数研究函数的零点，需要综合运用零点的存在性定理和利用导数研究函数的单调性．第 (2) 小题的难点在于发掘 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之间的关系．需要注意到为了处理其中的对数函数，我们两边同除以一个恒正的代数式，而这样做并不会影响函数的零点位置．*

解　(1) 一方面，由于 $f(0)=\pi-\frac{8}{3}>0$，而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi^2-\frac{16}{3}<0$，因此函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点；

另一方面，在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=-(1+\sin x)(\pi+2x)-2x-\frac{2}{3}\cos x<0,$$

因此 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减．

综上，存在唯一 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $f(x_0)=0$，命题得证．

(2) 欲证 $x_0+x_1<\pi$，只需要证明 $x_0<\pi-x_1$，令 $t=\pi-x$，则函数 $y=g(x)$ 的零点 x_1 和函数

$$h(t)=3t\cos t-4(1+\sin t)\ln\left(1+\frac{2t}{\pi}\right)$$

的零点 t_0 满足 $t_0=\pi-x_1$，于是问题转化为证明 $x_0<t_0$．

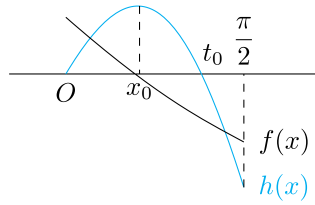
在 $h(t)$ 的函数解析式两边同时除以 $1+\sin t$，得到的新函数

$$l(t)=\frac{h(t)}{1+\sin t}$$

与 $h(t)$ 的零点相同，经过计算整理可得函数 $l(t)$ 的导函数

$$l'(t)=\frac{f(t)}{\frac{2}{3}(1+\sin t)\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

根据第 (1) 小题的结果，$l(t)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减．注意到 $l(0)=0$，因此 $l(x_0)>0$，又 $l\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，因此函数 $l(t)$ 的零点 t_0 满足 $x_0<t_0<\frac{\pi}{2}$，从而命题得证．



文科第 21 题． 已知函数 $f(x)=\pi(x-\cos x)-2\sin x-2$ ，$g(x)=(x-\pi)\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\dfrac{2x}{\pi}-1$.

(1) 证明：存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ，使 $f(x_0)=0$ ；

(2) 证明：存在唯一 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ ，使 $g(x_1)=0$ ，且对 (1) 中的 x_0 ，有 $x_0+x_1>\pi$.

分析 与理科第 21 题类似，不同的是第 (2) 小题中无需处理对数函数，只需要将 $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ 作合适的变形即可.

解 (1) 一方面，由于 $f(0)=-\pi-2<0$ ，而 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}-4>0$ ，因此函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点；

另一方面，在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\pi(1+\sin x)-2\cos x>0,$$

因此 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

综上，存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ，使 $f(x_0)=0$ ，命题得证.

(2) 欲证 $x_0+x_1>\pi$ ，只需要证明 $x_0>\pi-x_1$ ，令 $t=\pi-x$ ，则 $y=g(x)$ 的零点 x_1 与

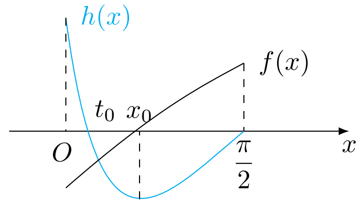
$$h(t)=-\frac{t\cos t}{1+\sin t}-\frac{2}{\pi}t+1$$

的零点 t_0 满足 $t_0=\pi-x_1$ ，于是问题转化为证明 $x_0>t_0$.

注意到

$$h'(t)=\frac{f(t)}{\pi(1+\sin t)},$$

因此根据第 (1) 小题的结果，$h(t)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增．注意到 $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ ，因此 $h(x_0)<0$ ，又 $h(0)>0$ ，因此函数 $h(t)$ 的零点 t_0 满足 $0<t_0<x_0$ ，从而命题得证.



第十四章　山东卷

14.1　鱼龙混杂

理科第 10 题.　已知 $a>b>0$，椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$C_1$ 与 C_2 的离心率之积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 C_2 的渐近线方程为 (　　)

A. $x\pm\sqrt{2}y=0$　　B. $\sqrt{2}x\pm y=0$　　C. $x\pm 2y=0$　　D. $2x\pm y=0$

分析 根据题意，有

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

从而解得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此双曲线 C_2 的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{2}y=0$.

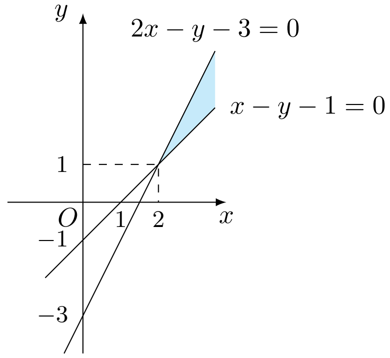
解　A

14.2　首尾相连

理科第 9 题/文科第 10 题.　已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\ 2x-y-3\geqslant 0,\end{cases}$ 当目标函数 $z=ax+by\ (a>0,b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时，a^2+b^2 的最小值为 (　　)

A. 5　　B. 4　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

分析 画出平面区域，如图.



由于 $a>0$，$b>0$，因此 $ax+by$ 在 $(2,1)$ 处取得最小值，此时有 $2a+b=2\sqrt{5}$，又

$$2a+b=(2,1)\cdot(a,b)\leqslant\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+b^2},$$

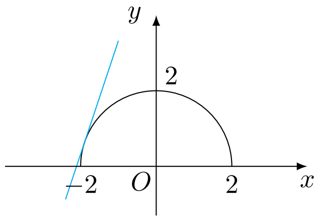
从而 $a^2+b^2\geqslant 4$，当且仅当 (a,b) 与 $(2,1)$ 同向时取得等号[1]，因此 a^2+b^2 的最小值为 4.

解　B

14.3　“对称函数”

理科第 15 题.　已知函数 $y=f(x)\,(x\in\mathbf{R})$. 对函数 $y=g(x)\,(x\in I)$，定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的“对称函数”为函数 $y=h(x)\,(x\in I)$，$y=h(x)$ 满足：对任意 $x\in I$，两个点 $(x,h(x))$，$(x,g(x))$ 关于点 $(x,f(x))$ 对称. 若 $h(x)$ 是 $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x)=3x+b$ 的“对称函数”，且 $h(x)>g(x)$ 恒成立，则实数 b 的取值范围是________.

分析 根据对称函数的定义，函数 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的图象分别在 $f(x)$ 的图象的两侧. 由于 $y=\sqrt{4-x^2}$ 即 $x^2+y^2=4\,(y\geqslant 0)$，因此 $g(x)$ 的图象是一个半圆，而 $f(x)$ 的图象是一条直线，所以当直线 $y=3x+b$ 在半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 上方时符合题意.



此时有

$$\frac{|b|}{\sqrt{1^2+3^2}}>2\ \text{且}\ b>0,$$

解得 $b>2\sqrt{10}$.

解　$\left(2\sqrt{10},+\infty\right)$

14.4　亦步亦趋

文科第 15 题.　已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，右顶点为 A，抛物线 $x^2=2py\,(p>0)$ 的焦点为 F，若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$，且 $|FA|=c$，则双曲线的渐近线方程为________.

分析 由 $|FA|=c$ 可得抛物线的焦点 F 的坐标为 $(0,b)$，因此抛物线的准线为 $y=-b$. 又双曲线截抛物线的准线所得的线段长为 $2c$，因此双曲线过点 $(c,-b)$，从而

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{(-b)^2}{b^2}=1,\ \text{即}\ c^2=2a^2,$$

进而结合 $c^2=a^2+b^2$ 可得 $a^2=b^2$，因此双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$.

解　$y=\pm x$

[1] 也可以把 $2a+b=2\sqrt{5}\,(a,b>0)$ 看成是一条线段 (不包含端点)，考虑原点到该线段的距离

14.5　分离变量

理科第 20 题.　设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-k\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right)$ （k 为常数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）.

(1) 当 $k\leqslant 0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在两个极值点，求 k 的取值范围.

分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，第 (2) 小题考查利用导函数研究函数的极值点，均属于常规问题.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^x\left(x^{-2}-2x^{-3}\right)-k\left(-2x^{-2}+x^{-1}\right)=\frac{(\mathrm{e}^x-kx)\cdot(x-2)}{x^3},$$

其中 $x>0$. 当 $x>0$，$k\leqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^x-kx>0$，因此在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$. 于是函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,2)$，单调递增区间是 $(2,+\infty)$.

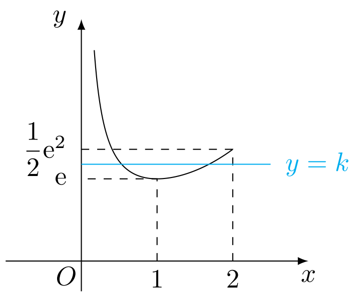
(2) 根据题意，考虑方程 $\mathrm{e}^x-kx=0$ 在 $(0,2)$ 上的解的个数，将方程变形[1]为

$$k=\frac{\mathrm{e}^x}{x},$$

令 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，则其导函数

$$h'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2},$$

因此函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增，在 $x=1$ 处取得极小值 e，如图.



根据题意，结合 $h\left(\dfrac{1}{5}\right)=5\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}>\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2$，因此直线 $y=k$ 与函数 $h(x)$ 的图象有两个公共点，于是 $\mathrm{e}<k<\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2$. 经验证，当 k 在此范围时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 有两个极值点. 因此所求 k 的取值范围是 $\left(\mathrm{e},\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2\right)$.

14.6　椭圆的“垂径定理”

文科第 21 题.　在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点（A,B 不是椭圆 C 的顶点）. 点 D 在椭圆 C 上，且 $AD\perp AB$，直线 BD 与 x 轴、y 轴分别交于 M,N 两点.

[1]详见附录『分离变量法』

(i) 设直线 BD,AM 的斜率分别为 k_1,k_2 ，证明：存在常数 λ 使得 $k_1=\lambda k_2$ ，并求出 λ 的值；

(ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值．

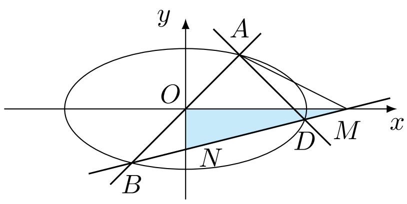
分析 第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，属于常规问题．第 (2) 小题的本质即椭圆的“垂径定理”[1]，可以利用点差法避免联立直线与椭圆方程，减少运算量．

解 (1) 直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ ，因此椭圆 C 过点 $\left(\dfrac{2\sqrt5}{5},\dfrac{2\sqrt5}{5}\right)$ ，因此有

$$\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2+\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2=1,$$

又由椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt3}{2}$ ，可得 $a^2=4b^2$ ，因此可以解得 $a^2=4$ ， $b^2=1$ ，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ．

(2) 如图，设直线 AB,AD 的斜率分别为 k,k_3 ， $A(x_0,kx_0)$ ， $B(-x_0,-kx_0)$ ， $D(x_1,y_1)$ ．



点 A,D 在椭圆上，于是

$$\frac{x_0^2}{4}+(kx_0)^2=1,\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,$$

两式相减，变形得

$$\frac{y_1-kx_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_1-(-kx_0)}{x_1-(-x_0)}=-\frac14,\quad 即\ k_3\cdot k_1=-\frac14.$$

从而直线 AB,AD,BD 的斜率分别为 $k,-\dfrac1k,\dfrac k4$ ，进而直线 BD 的方程为

$$y=\frac k4(x+x_0)-kx_0,$$

可以解得 $M(3x_0,0)$ ， $N\left(0,-\dfrac34kx_0\right)$ ．

因此直线 AM 的斜率 $k_2=\dfrac{kx_0-0}{x_0-3x_0}=-\dfrac k2$ ，从而 $\lambda=\dfrac{k_1}{k_2}=-\dfrac12$ ．

(2) 三角形 OMN 的面积

$$S=\left|\frac12\cdot3x_0\cdot\left(-\frac34kx_0\right)\right|=\frac98\cdot x_0^2\cdot|k|,$$

又 $\dfrac{x_0^2}{4}+(kx_0)^2=1$ ，从而 $x_0^2=\dfrac{4}{4k^2+1}$ ，将其代入上式可得

$$S=\frac98\cdot\frac{4|k|}{4k^2+1}=\frac98\cdot\frac{4}{4|k|+\dfrac{1}{|k|}}\leqslant\frac98\cdot\frac44=\frac98,$$

等号当且仅当 $|k|=\dfrac12$ 时取得．因此 $\triangle OMN$ 面积的最大值为 $\dfrac98$ ．

[1]详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』

14.7　抛物线的性质

理科第 21 题．　已知抛物线 $C: y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点为 F ，A 为 C 上异于原点的任意一点，过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B ，交 x 轴的正半轴于点 D ，且有 $|FA|=|FD|$ ．当点 A 的横坐标为 3 时，$\triangle ADF$ 为正三角形．

(1) 求 C 的方程;

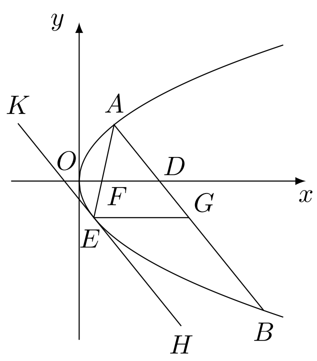
(2) 若直线 $l_1 \parallel l$ ，且 l_1 和 C 有且只有一个公共点 E ，

　(i) 证明直线 AE 过定点，并求出定点坐标;

　(ii) $\triangle ABE$ 的面积是否存在最小值? 若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由．

分析　*第 (1) 小题考查抛物线的方程与基本量．第 (2) 小题的两个小问的背景均为抛物线的常用性质 (光学性质，算术平均性质，几何平均性质)，熟悉这些性质就可以简化解题思路．*

解　(1) 根据题意，作出示意图．



当点 A 的横坐标是 3 时，不妨设其坐标为 $(3,\sqrt{6p})$ ，又由于 $\triangle AFD$ 为等边三角形，因此 A 点的纵坐标为 $\sqrt{3}\cdot\left(3-\dfrac{p}{2}\right)$ ，因此

$$\sqrt{6p}=\sqrt{3}\cdot\left(3-\frac{p}{2}\right),$$

解得 $p=2$ ，因此抛物线 C 的方程为 $C: y^2=4x$ ．

(2)(i) 过 E 作 x 轴的平行线，交 AB 于点 G ，将 l_1 标记为 KH ，其中点 K 与 A 在直线 EG 的同侧，如图．由抛物线的光学性质得 $\angle FEK=\angle GEH$ ，又

$$\angle GEH=\angle EGA=\angle FDA=\angle FAD,$$

因此 A,F,E 三点共线，于是直线 AE 过定点 $F(1,0)$ ．

(ii) 首先证明:

引理[1]　若抛物线 $y^2=2px\,(\,p>0\,)$ 与直线 $x=my+t$ 相交于点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$ ，与直线 $x=my+t_0$ 相切于 $T(x_0,y_0)$ ，则有 $x_1x_2=t^2$ ，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=y_0$ ．

引理的证明　联立直线 $x=my+t$ 与抛物线的方程，可得 $y^2-2pmy-2pt=0$ ，从而

$$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}=t^2,$$

[1]详见『抛物线的性质』

且

$$\frac{y_1+y_2}{2}=pm.$$

联立直线 $x=my+t_0$ 与抛物线的方程，可得 $y^2-2pm-2pt_0=0$，从而 $y_0=pm$，因此

$$\frac{y_1+y_2}{2}=y_0.$$

因此引理得证.

设点 A 的坐标为 $\left(4t^2,4t\right)$，则由 $F(1,0)$ 以及引理可得 $E\left(\frac{1}{4t^2},-\frac{1}{t}\right)$，又由抛物线的定义，$|DF|=|AF|=4t^2+1$，于是点 $D\left(4t^2+2,0\right)$，进而应用引理可得 $B\left(\frac{(4t^2+2)^2}{4t^2},-\left(4t+\frac{2}{t}\right)\right)$，再由直线方程可得 $G\left(\frac{1}{2t^2}+4t^2+2,-\frac{1}{t}\right)$，因此三角形 ABE 的面积

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|EG|\cdot|y_A-y_B|\\&=\frac{1}{2}\left(4t^2+\frac{1}{4t^2}+2\right)\cdot\left|8t+\frac{2}{t}\right|\\&=\frac{1}{4}\left|4t+\frac{1}{t}\right|^3\\&\geqslant\frac{1}{4}\cdot 4^3\\&=16,\end{aligned}$$

等号当且仅当 $t=\pm\frac{1}{2}$ 时取得. 因此三角形 ABE 的面积存在最小值 16，当 A 的坐标为 $(1,\pm 2)$ 时取得.

14.8 一波三折

文科第 20 题. 设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{x-1}{x+1}$，其中 a 为常数.

(1) 若 $a=0$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

分析 *第 (1) 小题考查利用导函数求曲线的切线方程，第 (2) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，均属于常规问题.*

解 (1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{x+1},x>0$，其导函数

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2},x>0,$$

因此 $f(1)=0$，$f'(1)=\frac{1}{2}$，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$$y=\frac{1}{2}(x-1),\ \text{即}\ x-2y-1=0.$$

(2) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{ax^2+2(a+1)x+a}{x(x+1)^2},x>0,$$

设 $h(x)=ax^2+2(a+1)x+a$ ，则 $h(0)=a$ ，判别式 $\Delta=4(2a+1)$ ，因此按 a 与 $-\dfrac{1}{2},0$ 的大小关系讨论.

第一种情形，$a\leqslant-\dfrac{1}{2}$. 此时 $\Delta\leqslant 0$ ，因此在 $(0,+\infty)$ 上 $h(x)\leqslant 0$ ，于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

第二种情形，$-\dfrac{1}{2}<a<0$. 此时 $h(0)<0$ ，对称轴 $x=-1-\dfrac{1}{a}>0$ ，$\Delta>0$ ，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点

$$x_1=\frac{-(a+1)+\sqrt{2a+1}}{a},x_2=\frac{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}{a},$$

于是函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增；

第三种情形，$a\geqslant 0$ 时，此时在 $(0,+\infty)$ 上 $h(x)\geqslant 0$ ，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，其中

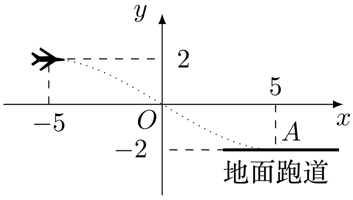
$$x_1=\frac{-(a+1)+\sqrt{2a+1}}{a},x_2=\frac{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}{a};$$

当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

第十五章　陕西卷

15.1　飞行轨迹

理科第 10 题．　如图，某飞行器在 4 千米高空水平飞行，从距着陆点 A 的水平距离 10 千米处开始下降，已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分，则该函数的解析式为 (　　)



A. $y=\dfrac{1}{125}x^3-\dfrac{3}{5}x$　　B. $y=\dfrac{2}{125}x^3-\dfrac{4}{5}x$

C. $y=\dfrac{3}{125}x^3-x$　　D. $y=-\dfrac{3}{125}x^3+\dfrac{1}{5}x$

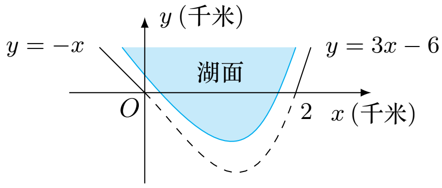
分析　根据题意，容易判断出函数为奇函数，设三次函数的解析式为 $y=ax^3+bx$，则其导函数为 $y'=3ax^2+b$，可列方程组

$$\begin{cases} a\cdot 5^3+b\cdot 5=-2, \\ 3a\cdot 5^2+b=0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=\dfrac{1}{125}, \\ b=-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

解　A

15.2　过渡曲线

文科第 10 题．　如图，修建一条公路需要一段环湖弯曲路段与两条直道平滑连接 (相切)，已知环湖弯曲路段为某三次函数图象的一部分，则该函数的解析式为 (　　)



A. $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x$　　B. $y=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-3x$

C. $y=\dfrac{1}{4}x^3-x$　　D. $y=\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$

分析 根据题意，三次函数 $y=f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=0$，$f'(0)=-1$，$f'(2)=3$，经验证，只有选项 A 符合.

解　A

15.3　欧拉公式

理科第 14 题.　观察分析下表中的数据：

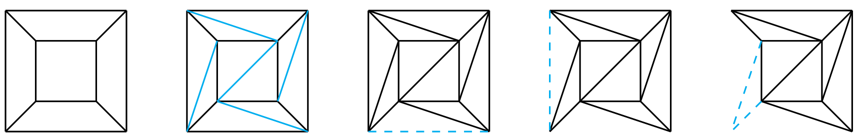
多面体	面数 (F)	顶点数 (V)	棱数 (E)
三棱柱	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12

猜想一般凸多面体中，F,V,E 所满足的等式是________.

分析 容易归纳出一般凸多面体满足 $F+V-E=2$.

解　$F+V-E=2$

拓展　本题中 F,V,E 所满足的等式即欧拉示性数为 2 的情形. 柯西在 20 岁的时候曾经给出严格证明，大致如下：



第一步，去掉多面体的一个面，然后把剩下的部分“铺平”为点和线段组成的平面图形，此时点、边和面的个数保持不变 (去掉的多面体的面对应平面网络的外部)，因此 $F+V-E$ 的值不变.

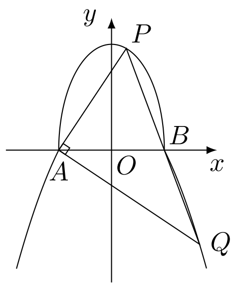
第二步，若存在某一个面的多边形的边数是 4 或者大于 4，那么画此多边形的一条对角线，这样增加一条边和一个面，$F+V-E$ 的值不变. 重复这一步骤，直到所有的面都是三角形.

第三步，逐步除掉各个面. 当面只有一条边与外部相邻时，边和面的个数各减少 1，而顶点数保持不变；当面有两条边与外部相邻时，减少 1 个顶点，2 条边以及 1 个面. 显然无论何种情形，$F+V-E$ 保持不变. 重复这一步骤，直到只剩下一个三角形.

第四步，对于一个三角形而言，$F=2$，$E=3$，$V=3$，所以 $F+V-E=2$.

15.4　狗尾续貂

理科第 20 题.　如图，曲线 C 由上半椭圆 $C_1:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0,y\geqslant 0)$ 和部分抛物线 $C_2:y=-x^2+1\,(y\leqslant 0)$ 连接而成，C_1 与 C_2 的公共点为 A,B，其中 C_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



(1) 求 a,b 的值；

(2) 过点 B 的直线 l 与 C_1,C_2 分别交于点 P,Q（均异于点 A,B），若 $AP\perp AQ$，求直线 l 的方程.

分析 第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量，第 (2) 小题考查直线与椭圆的位置关系以及直线与抛物线的位置关系，均属于常规问题.

解　(1) 由于 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，因此 $b=1$. 又 C_1 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此解得 $a=2$. 综上，a,b 的值分别为 $2,1$.

(2) 设直线 PQ 的方程为 $l:x=my+1$，联立直线 PQ 的方程与椭圆的方程，可得

$$(4m^2+1)y^2+8my=0,$$

因此 P 点的纵坐标为 $y_1=-\dfrac{8m}{4m^2+1}$.

联立直线 PQ 的方程与抛物线的方程，可得

$$m^2y^2+(2m+1)y=0,$$

因此 Q 点的纵坐标为 $y_2=-\dfrac{2m+1}{m^2}$.

根据题意，有直线 AP 与直线 AQ 的斜率之积为 -1，即

$$\frac{y_1-0}{my_1+1-(-1)}\cdot\frac{y_2-0}{my_2+1-(-1)}=-1,$$

将 y_1,y_2 关于 m 的表达式代入，可得

$$\frac{-\dfrac{8m}{4m^2+1}}{-\dfrac{8m^2}{4m^2+1}+2}\cdot\frac{-\dfrac{2m+1}{m^2}}{-\dfrac{2m+1}{m}+2}=-1,$$

解得 $m=-\dfrac{3}{8}$，因此直线 l 的方程为 $x=-\dfrac{3}{8}y+1$，即 $8x+3y-8=0$.

15.5 一箭双雕

文科第 20 题． 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 经过点 $\left(0,\sqrt{3}\right)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，左、右焦点分别为 $F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$．

(1) 求椭圆的方程；

(2) 若直线 $l:y=-\dfrac{1}{2}x+m$ 与椭圆交于 A,B 两点，与以 F_1F_2 为直径的圆交于 C,D 两点，且满足 $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，求直线 l 的方程．

分析 *第 (1) 小题考查椭圆的基本量与方程，第 (2) 小题考查直线与椭圆的位置关系以及直线与圆的位置关系，均属于常规问题．*

解 (1) 根据题意，$b=\sqrt{3}$，又离心率 $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{2}$，因此解得 $a=2$，所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线 l 与椭圆的方程可得

$$x^2-mx+m^2-3=0,$$

因此

$$|AB|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{12-3m^2},$$

又根据垂径定理，可得

$$|CD|=2\cdot\sqrt{1^2-\left(\frac{|m|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}}\right)^2}=2\cdot\sqrt{1-\frac{4m^2}{5}},$$

由已知 $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，可得

$$\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{12-3m^2}}{2\cdot\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{5}}}=\frac{5\sqrt{3}}{4},$$

解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因此直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

15.6 迭代函数

理科第 21 题． 设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$，$g\left(x\right)=xf'\left(x\right)$，$x\geqslant 0$，其中 $f'\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导函数．

(1) 令 $g_1\left(x\right)=g\left(x\right)$，$g_{n+1}\left(x\right)=g\left(g_n\left(x\right)\right)$，$n\in\mathbf{N}_+$，求 $g_n\left(x\right)$ 的表达式；

(2) 若 $f\left(x\right)\geqslant ag\left(x\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3) 设 $n\in\mathbf{N}_+$，比较 $g\left(1\right)+g\left(2\right)+\cdots+g\left(n\right)$ 与 $n-f\left(n\right)$ 的大小，并加以证明．

分析 *第 (1) 小题考查归纳推理以及对应的证明．第 (2) 小题是典型的含参数的恒成立问题，利用导函数分析端点即可得到分界点，然后进行讨论即可．第 (3) 小题作差后利用第 (2) 小题的结果即可得到结论．*

解　(1) 根据题意，可得

$$
\begin{aligned}
&g_1(x)=\frac{x}{1+x},\\
&g_2(x)=\frac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x},\\
&g_3(x)=\frac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x},\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

归纳得 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$，用数学归纳法证明如下.

当 $n=1$ 时，命题显然成立；
假设当 $n=k\,(\,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，命题成立，即 $g_k(x)=\dfrac{x}{1+kx}$ ，则当 $n=k+1$ 时，

$$
g_{k+1}(x)=g(g_k(x))=\frac{\dfrac{x}{1+kx}}{1+\dfrac{x}{1+kx}}=\frac{x}{1+(k+1)x},
$$

因此命题对 $n=k+1$ 依然成立.
综上，命题得证，因此 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}\,(\,n\in\mathbf{N}^*\,)$.

(2) 令 $h(x)=f(x)-ag(x)$ ，则函数 $h(x)$ 的导函数

$$
h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{a}{(1+x)^2}=\frac{x+1-a}{(1+x)^2},
$$

于是按 a 和 1 的大小关系展开讨论.
当 $a>1$ 时,在 $(0,a-1)$ 上 $h'(x)<0$,因此 $h(x)$ 在 $(0,a-1)$ 上单调递减,在该区间上有 $h(x)<h(0)=0$,不符合题意；
当 $a\leqslant 1$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上 $h'(x)>0$ ，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，有 $h(x)\geqslant h(0)=0$ ，符合题意；
综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

(3) 作差

$$
\begin{aligned}
g(1)+g(2)+\cdots g(n)-[n-f(n)]&=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{1+n}-n+\ln(1+n)\\
&=\ln(1+n)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

根据第 (2) 小题的结果，取 $a=1$ ，可得 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}\,(\,x>0\,)$，令 $x=\dfrac{1}{k}\,(\,k>0\,)$，可得

$$
\ln\frac{k+1}{k}>\frac{1}{k+1},
$$

分别取 $k=1,2,\cdots,n$ ，累加即得

$$\ln(1+n)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n+1},$$

因此对所有正整数 n 均有

$$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)>n-f(n).$$

(陕西卷文科第 14 题) 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\geqslant 0$ ，若 $f_1(x)=f(x)$ ， $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$ ， $n\in\mathbf{N}_+$ ，则 $f_{2014}(x)$ 的表达式为________.

分析 *参考理科第 21 题的第 (1) 小题.*

解 $\dfrac{x}{1+2014x}$

15.7 拨乱反正

文科第 21 题. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}$ ， $m\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $m=\mathrm{e}$ (e 为自然对数的底数) 时，求 $f(x)$ 的极小值;

(2) 讨论函数 $g(x)=f'(x)-\dfrac{x}{3}$ 零点的个数;

(3) 若对任意 $b>a>0$ ， $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，求 m 的取值范围.

分析 *第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的极值，第 (2) 小题考查利用导函数研究函数的零点，第 (3) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，均属于常规问题. 其中第 (3) 小题需要利用代数变形将其转化.*

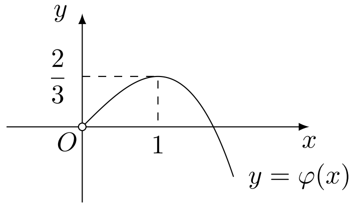
解 (1) 当 $m=\mathrm{e}$ 时， $f(x)=\ln x+\dfrac{\mathrm{e}}{x}$ ，其导函数

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{x^2}=\frac{x-\mathrm{e}}{x^2},x>0$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极小值 2 .

(2) 根据题意 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}-\dfrac{x}{3}$ ， $x>0$ ，因此其零点即方程 $m=x-\dfrac{1}{3}x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上的根.

设 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{3}x^3$ ，则其导函数 $\varphi'(x)=1-x^2$ ，因此函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减， $\varphi(0)=0$ ， $\varphi(1)=\dfrac{2}{3}$ ，如图.



于是当 $m>\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 的零点个数为 0 ；当 $m\leqslant 0$ 或 $m=\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 的零点个数为 1 ，当 $0<m<\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 的零点个数为 2 .

(3) 根据题意，有

$$\forall b > a > 0, f(b) - b < f(a) - a,$$

也即函数 $h(x) = f(x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.
函数 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x) = \frac{-x^2 + x - m}{x^2}, x > 0,$$

根据题意，在区间 $(0, +\infty)$ 上，$h'(x) \leqslant 0$ 恒成立，因此

$$\forall x > 0, m \geqslant -x^2 + x = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

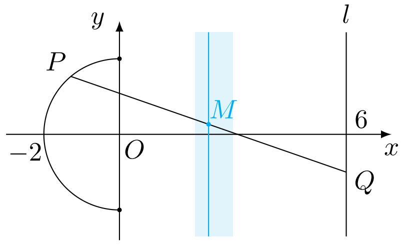
从而 $m \geqslant \dfrac{1}{4}$，因此 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

第十六章　上海卷

16.1　牵一发而动全身

理科第 14 题/文科第 14 题.　已知曲线 $C: x=-\sqrt{4-y^2}$ ，直线 $l: x=6$. 若对于点 $A(m,0)$ ，存在 C 上的点 P 和 l 上的 Q 使得 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$ ，则 m 的取值范围为________.

分析　曲线 C 是以原点 O 为圆心，2 为半径的半圆. 根据题意，由 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$ 得 A 是线段 PQ 的中点. 考虑当 P,Q 运动时，其中点 M 构成的平面区域：



先固定 P 点为 (x_P, y_P) ，让 Q 点在直线 l 上运动，这样就得到对应的 M 点的轨迹是一条竖直的直线 $x=\dfrac{x_P+6}{2}$. 然后让 P 点在半圆上运动，则 M 点的轨迹随之运动形成的区域即所有满足条件的 M 点的集合，如图. 因此 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{0+6}{2}\right]$ ，即 $[2,3]$.

解　$[2,3]$

16.2　一叶知秋

理科第 17 题/文科第 18 题　$P_1(a_1,b_1)$ ，$P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$ (k 为常数) 上两个不同的点，则关于 x 和 y 的方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=1 \\ a_2x+b_2y=1 \end{cases}$$

的解的情况是 (　　)

A. 无论 k,P_1,P_2 如何，总是无解

B. 无论 k,P_1,P_2 如何，总有唯一解

C. 存在 k,P_1,P_2 ，使之恰有两解

D. 存在 k,P_1,P_2 ，使之有无穷多解

分析 根据题意，行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 = a_1(ka_2+1) - a_2(ka_1+1) = a_1 - a_2 \neq 0,$$

因此题中关于 x, y 的方程组一定有唯一解.

解 B

16.3 技压群雄

理科第 18 题. 设 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leqslant 0, \\ x + \dfrac{1}{x} + a, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为 ( )

A. $[-1, 2]$ B. $[-1, 0]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

分析 情形 *1*，$a < 0$. 此时 $f(a) = 0 < f(0)$ ，不符合题意；
情形 *2*，$a \geqslant 0$. 此时在 $x \leqslant 0$ 的部分，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最小值为 a^2 . 在 $x > 0$ 的部分，函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值为 $2 + a$. 因此只需要

$$a^2 \leqslant 2 + a \text{ 解得 } -1 \leqslant a \leqslant 2,$$

因此 $0 \leqslant a \leqslant 2$.
综上所述，a 的取值范围是 $[0, 2]$.

解 D

16.4 楚河汉界

理科第 22 题/文科第 22 题. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于直线 $l: ax + by + c = 0$ 和点 $P_1(x_1, y_1)$ ，$P_2(x_2, y_2)$ ，记 $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$. 若 $\eta < 0$ ，则称点 P_1 ，P_2 被直线 l 分隔. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点，且曲线 C 上存在点 P_1 ，P_2 被直线 l 分隔，则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线.

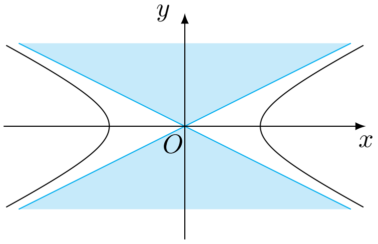
(1) 求证：点 $A(1, 2)$ ，$B(-1, 0)$ 被直线 $x + y - 1 = 0$ 分隔；

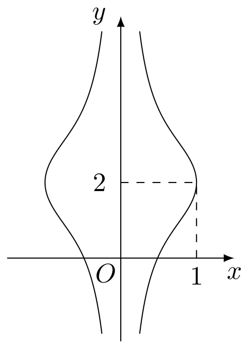
(2) 若直线 $y = kx$ 是曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的分隔线，求实数 k 的取值范围；

(3) 动点 M 到点 $Q(0, 2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1 ，设点 M 的轨迹为 E ，求证：通过原点的直线中，有且仅有一条直线是 E 的分割线[1].

分析 第 *(1)* 小题和第 *(2)* 小题分别考查对新定义的“分隔”和“分隔线”的理解. 第 *(2)* 小题可以借助双曲线的渐近线从直观上得到答案，如左图. 第 *(3)* 小题在得到 M 的轨迹 E 后，可以先画出函数 $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - x^2} + 2\ (x \in (0, 1]\,)$ 的图象，然后利用该曲线关于 y 轴和直线 $y = 2$ 对称的特点，得到整条曲线进而得到结论 *(*最为关键的是得到不与 x 轴垂直的直线必然与曲线在 $x \in (0, 1]$ 时有公共点，如右图.

[1] 文科第 22 题需要先确定轨迹 E 的方程，并指明了唯一的分割线是 y 轴





解　(1) 此时 $\eta=2\cdot(-2)=-4<0$，根据分隔的定义，命题成立.

(2) 联立直线 $y=kx$ 与双曲线 $x^2-4y^2=1$ 的方程，可得

$$(1-4k^2)x^2-1=0,$$

因此当且仅当 $k^2\geqslant\dfrac{1}{4}$ 时曲线 C 与直线 l 没有公共点. 此时取 $P_1(1,0)$，$P_2(-1,0)$，则显然点 P_1,P_2 被直线 l 分隔. 因此实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(3) 设动点 $M(x,y)$，则根据题意有

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}\cdot|x|=1,$$

因此点 M 的轨迹为 $E:x^4+x^2(y-2)^2=1$.

考虑直线 $x=0$，显然该直线与曲线 E 没有公共点，且点 $(1,2)$ 和点 $(-1,2)$ 被该直线分隔，因此直线 $x=0$ 为 E 的分割线.

接下来证明直线 $y=kx\ (k\in\mathbf{R})$ 不是 E 的分割线.

联立直线 $y=kx$ 与曲线 E 的方程，得

$$x^4+x^2(kx-2)^2=1,$$

令 $f(x)=x^4+x^2(kx-2)^2-1$，则

$$f(0)\cdot f(1)=-(k-2)^2\leqslant 0,$$

因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上必然有零点，也即直线 $y=kx$ 与曲线 E 必然有公共点，从而直线 $y=kx\ (k\in\mathbf{R})$ 不是 E 的分割线.

综上所述，通过原点的直线中，有且仅有一条直线是 E 的分割线.

16.5　画龙点睛

理科第 23 题.　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{3}a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 3a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=1$.

(1) 若 $a_2=2$，$a_3=x$，$a_4=9$，求 x 的取值范围；

(2) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\dfrac{1}{3}S_n\leqslant S_{n+1}\leqslant 3S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 q 的取值范围；

(3) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 成等差数列，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1000$ ，求正整数 k 的最大值，以及 k 取最大值时相应数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的公差.

分析 第 *(1)* 小题考查对题意的理解能力. 第 *(2)* 小题在利用等比数列的求和公式得到 S_n 后，根据公比展开讨论即可. 第 *(3)* 小题引入了两个参数 *(* k 和 d *)*，利用等差数列的求和公式得到方程，然后消参求解即可.

解 (1) 根据题意，有

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 6, \\ \dfrac{x}{3} \leqslant 9 \leqslant 3x, \end{cases}$$

解得 x 的取值范围是 $[3,6]$.

(2) 根据题意，有

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{3}q^{n-1} \leqslant q^n \leqslant 3q^{n-1},$$

从而 $\dfrac{1}{3} \leqslant q \leqslant 3$.

情形 1， $q=1$. 此时 $S_n = n\,(\,n \in \mathbf{N}^*\,)$，显然有 $\dfrac{1}{3}S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant 3S_n$ ，符合题意.

情形 2， $\dfrac{1}{3} \leqslant q < 1$. 此时 $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ ，根据题意，有

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{3} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \leqslant \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leqslant 3 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

即对任意正整数 n ，均有

$$\begin{cases} q^n(3-q) \leqslant 2, \\ q^n(3q-1) \leqslant 2, \end{cases}$$

也即

$$\begin{cases} q(3-q) \leqslant 2, \\ q(3q-1) \leqslant 2, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{1}{3} \leqslant q < 1$.

情形 3， $1 < q \leqslant 3$. 此时 $S_n = \dfrac{q^n-1}{q-1}$ ，根据题意，有

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{3} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \leqslant \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \leqslant 3 \cdot \frac{q^n-1}{q-1},$$

即对任意正整数 n ，均有

$$\begin{cases} q^n(3-q) \geqslant 2, \\ q^n(3q-1) \geqslant 2, \end{cases}$$

也即

$$\begin{cases} q(3-q) \geqslant 2, \\ q(3q-1) \geqslant 2, \end{cases}$$

解得 $1<q\leqslant 2$.
综上所述， q 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},2\right]$.
(3) 根据题意，当 $n=1,2,\cdots,k-1$ 时，均有

$$\frac{1}{3}\cdot[1+(n-1)d]\leqslant 1+nd\leqslant 3\cdot[1+(n-1)d],$$

即对 $n=1,2,\cdots,k-1$ ，均有

$$\begin{cases}(2n+1)d\geqslant -2,\\(2n-3)d\geqslant -2,\end{cases}$$

从而 $-\dfrac{2}{2k-1}\leqslant d\leqslant 2$.
又由等差数列的前 n 项和公式，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=\frac{d}{2}k^2+\left(1-\frac{d}{2}\right)k=1000,$$

解得 $d=\dfrac{2000-2k}{k^2-k}$.
综上所述，有

$$-\frac{2}{2k-1}\leqslant\frac{2000-2k}{k^2-k}\leqslant 2,$$

解得 $32\leqslant k\leqslant 1999$ ，因此 k 的最大值为 1999 ，此时公差 $d=-\dfrac{1}{1999}$.

文科第 **23** 题.　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{3}a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 3a_n,n\in\mathbf{N}^*$ ， $a_1=1$.
(1) 若 $a_2=2$ ， $a_3=x$ ， $a_4=9$ ，求 x 的取值范围；
(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_m=\dfrac{1}{1000}$ ，求正整数 m 的最小值，以及 m 取最小值时相应 $\{a_n\}$ 的公比；
(3) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 成等差数列，求 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的公差的取值范围.

分析　*与理科第 23 题基本相同，差异在于第 (2) 小题没有与等比数列的求和公式综合，第 (3) 小题没有与等差数列的求和公式综合，全面降低了问题的难度.*

解　(1) 见理科第 23 题；
(2) 根据题意，有

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\frac{1}{3}q^{n-1}\leqslant q^n\leqslant 3q^{n-1},$$

从而 $\dfrac{1}{3}\leqslant q\leqslant 3$ ，进而

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\leqslant q^{m-1}\leqslant 3^{m-1},$$

即

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\leqslant\frac{1}{1000}\leqslant 3^{m-1},$$

从而 m 的最小值为 8 ，相应 $\{a_n\}$ 的公比为 $10^{-\frac{3}{7}}$.

(3) 根据题意，当 $n=1,2,\cdots,99$ 时，均有

$$\frac{1}{3}\cdot[1+(n-1)d]\leqslant 1+nd\leqslant 3\cdot[1+(n-1)d],$$

即对 $n=1,2,\cdots,99$，均有

$$\begin{cases}(2n+1)d\geqslant -2,\\(2n-3)d\geqslant -2,\end{cases}$$

从而 $-\dfrac{2}{199}\leqslant d\leqslant 2$. 因此等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的公差的取值范围为 $\left[-\dfrac{2}{199},2\right]$.

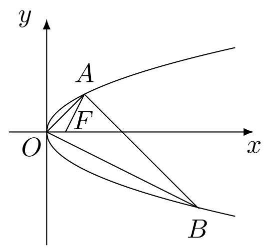
第十七章　四川卷

17.1　以点代面

理科第 10 题/文科第 10 题．　已知 F 为抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A,B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$(其中 O 为坐标原点)，则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. $\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　　D. $\sqrt{10}$

分析 画出示意图，如图．



设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，得

$$x_1x_2+y_1y_2=2,\ \text{即}\ x_1x_2-\sqrt{x_1x_2}-2=0,$$

从而 $x_1x_2=4$，因此直线 AB 恒过点 $(2,0)$[1]，因此 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 的面积之和为

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|y_1-y_2|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot|y_1|=\left|\frac{9}{8}y_1-y_2\right|=\frac{9}{8}\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{8}\sqrt{x_1x_2}}=3,$$

等号当且仅当 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{64}{81}$ 时取得．因此所求面积之和的最小值为 3．

解　B

17.2　有界函数

理科第 15 题/文科第 15 题．　以 A 表示值域为 $\mathbf{R}$ 的函数组成的集合，B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：对于函数 $\varphi(x)$，存在一个正数 M，使得函数 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 $[-M,M]$．例如，当 $\varphi_1(x)=x^3$，$\varphi_2(x)=\sin x$ 时，$\varphi_1(x)\in A$，$\varphi_2(x)\in B$．现有如下命题:

[1]根据抛物线的几何平均性质，详见附录『抛物线的性质』

① 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则“$f(x)\in A$”的充要条件是“$\forall b\in\mathbf{R}$，$\exists a\in D$，$f(a)=b$”；

② 函数 $f(x)\in B$ 的充要条件是 $f(x)$ 有最大值和最小值[1]；

③ 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域相同，且 $f(x)\in A$，$g(x)\in B$，则 $f(x)+g(x)\notin B$；

④ 若函数 $f(x)=a\ln(x+2)+\dfrac{x}{x^2+1}$ $(x>-2,a\in\mathbf{R})$ 有最大值，则 $f(x)\in B$．

其中的真命题有________．(写出所有真命题的序号)

分析 集合 A 中的函数即值域为 $\mathbf{R}$ 的函数，集合 B 中的函数即有界函数．

对于命题①，“$\forall b\in\mathbf{R}$，$\exists a\in D$，$f(a)=b$”的含义为“对于实数集合内的任何一个取值 b，都存在一个定义域内的取值 a 使得函数 $f(x)$ 在 a 处的函数值为 b”，也就说函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，因此命题正确．

对于命题②，$f(x)$ 有最大值和最小值是函数 $f(x)\in B$ 的充分但不必要条件，有界函数不一定有最值，如函数 $f(x)=\arctan x$．因此命题错误．

对于命题③，命题正确，否则若 $f(x)+g(x)$ 和 $g(x)$ 都有界，分别设它们的界为 M_1 和 M_2，则根据绝对值不等式，M_1+M_2 一定是函数 $f(x)$ 的界，与函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 矛盾．

对于命题④，由于 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$，因此函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 有界．因此若函数 $f(x)$ 有最大值，那么 $a=0$，因此函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 有界，命题正确．

解 ①③④

17.3 椭圆的“垂径定理”

理科第 20 题． 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的焦距为 4，其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形．

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点，T 为直线 $x=-3$ 上任意一点，过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P，Q．

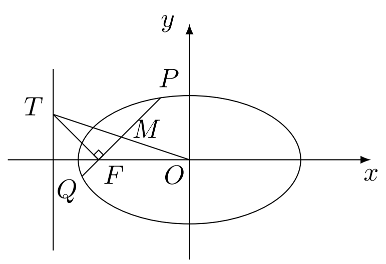
(i) 证明：OT 平分线段 PQ（其中 O 为坐标原点）；

(ii) 当 $\dfrac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时，求点 T 的坐标．

分析 第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量．第 (2) 小题中的第 (i) 小问本质即椭圆的“垂径定理”[2]，可以利用点差法轻松解决；第 (ii) 小问考查直线与椭圆的位置关系，是一个典型的弦长问题．

解 (1) 根据题意，椭圆短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形，于是 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2b$，又 $2c=4$，$a^2=b^2+c^2$，因此可得 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

(2) 设 $T(-3,t)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，线段 PQ 的中点为 M，连接 OT，如图．



[1]文科第 15 题中此命题为：“② 若函数 $f(x)\in B$，则 $f(x)$ 有最大值和最小值；”

[2]详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』

(i) 情形一，$t \neq 0$．一方面，直线 TF 的斜率为 $-t$，直线 PQ 的斜率为 $\dfrac{1}{t}$，直线 OT 的斜率为 $-\dfrac{t}{3}$．另一方面，由于 $\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{6}+\dfrac{y_2^2}{2}=1$，两式相减，并应用平方差公式可得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0,$$

从而

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{3},$$

即直线 PQ 与直线 OM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{3}$，进而直线 OM 的斜率为 $-\dfrac{t}{3}$．
综合以上两方面，O,M,T 三点共线，因此命题成立．
情形二，$t=0$．此时 OT 显然平分 PQ．
综上所述，命题得证．
(ii) 直线 PQ 的方程为 $x=ty-2$，与椭圆方程联立，有

$$(t^2+3)y^2-4ty-2=0,$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{|TF|}{|PQ|}&=\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{\sqrt{24t^2+24}}{t^2+3}}\\&=\frac{t^2+3}{\sqrt{24(t^2+1)}}\\&=\sqrt{\frac{1}{24}\cdot\left[(t^2+1)+\frac{4}{t^2+1}+4\right]}\\&\geqslant\sqrt{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

等号当且仅当 $t^2+1=2$，即 $t=\pm1$ 时取得．因此当 $\dfrac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时，T 点的坐标为 $(-3,\pm1)$．

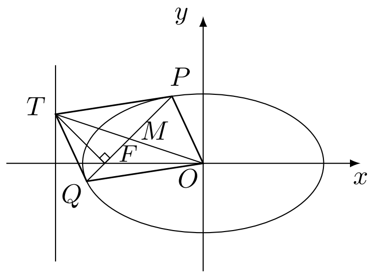
文科第 **20** 题．　已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左焦点为 $F\,(-2,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．
(1) 求椭圆 C 的标准方程；
(2) 设 O 为坐标原点，T 为直线 $x=-3$ 上一点，过 F 作 TF 的垂线交椭圆于 P,Q．当四边形 $OPTQ$ 是平行四边形时，求四边形 $OPTQ$ 的面积．

分析 *与理科第 20 题类似，参考理科第 20 题的分析．*

解　(1) 根据题意，半焦距 $c=2$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，于是 $a=\sqrt{6}$，进而

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2},$$

因此椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$．
(2) 设 $T(-3,t)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，线段 PQ 的中点为 M，连接 OT，如图．



四边形 $OPTQ$ 是平行四边形即 OT 与 PQ 互相平分，于是取 $M\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}t\right)$. 此时[1]直线 PQ 的斜率

$$\frac{1}{t}=\frac{\frac{1}{2}t-0}{-\frac{3}{2}-(-2)},\quad \text{解得 } t=\pm 1.$$

不妨设 $PQ: x=y-2$ ，与椭圆方程联立，得

$$2y^2-2y-1=0,$$

于是由弦长公式，有

$$|PQ|=\sqrt{1+1^2}\cdot\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{6},$$

原点 O 到直线 PQ 的距离 $h=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ，从而四边形 $OPTQ$ 的面积为

$$|PQ|\cdot h=2\sqrt{3}.$$

17.4 奇异的规划

理科第 21 题/文科第 21 题. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-bx-1$ ，其中 $a,b\in\mathbf{R}$ ， $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值；

(2) 若 $f(1)=0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围[2].

分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的最值，第 (2) 小题考查利用导数研究函数的零点，均属于常规问题.

解 (1) 根据题意， $g(x)=\mathrm{e}^x-2ax-b$ ，于是其导函数

$$g'(x)=\mathrm{e}^x-2a,$$

于是当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，其最小值为 $g(0)=1-b$ ；

当 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上先单调递减，再单调递增，其最小值为

$$g(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)-b;$$

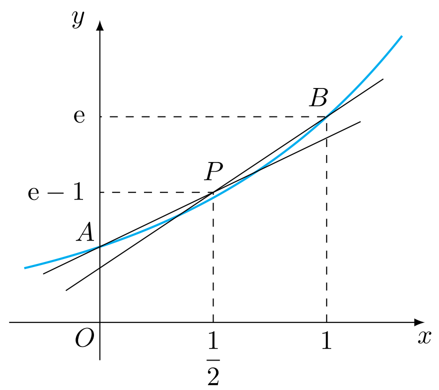
[1] OT 一定平分 PQ ，参见理科第 20 题的证明

[2] 文科第 21 题将第 (2) 小题改为了证明题

当 $a \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，其最小值为 $g(1)=\mathrm{e}-2a-b$.
因此函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值

$$\min_{x\in[0,1]} g(x)=\begin{cases}1-b, a\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 2a-2a\ln(2a)-b, \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{\mathrm{e}}{2},\\ \mathrm{e}-2a-b, a\geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}.\end{cases}$$

(2) 一方面，注意到 $f(0)=f(1)=0$ ，因此函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内至少有 3 个零点，因此其导函数 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有 2 个零点；
另一方面，函数 $f''(x)$ 为单调递增函数，因此 $f'(x)$ 至多有 2 个零点；
综合以上两方面，可得函数 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 2 个零点为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内有 3 个零点的充要条件．如果我们将 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点看作是指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与直线 $y=2ax+b$ 的交点横坐标，那么条件 $f(1)=0$ 即 $a+b=\mathrm{e}-1$ 意味着直线 $y=2ax+b$ 过定点 $P\left(\dfrac{1}{2},\mathrm{e}-1\right)$ ，如图．



P 点在指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 图象的上方，记 $A(0,1)$ ，$B(1,\mathrm{e})$ ，则指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与直线 $y=2ax+b$ 有 2 个交点等价于直线斜率 $2a$ 在直线 PA 的斜率和直线 PB 的斜率之间．不难计算得 a 的取值范围为 $(\mathrm{e}-2,1)$.

第十八章　天津卷

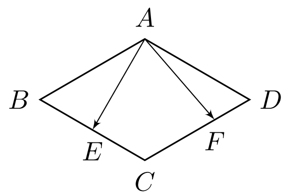
18.1　稳扎稳打

理科第 8 题.　已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=120^\circ$，点 E，F 分别在边 BC，DC 上，$BE=\lambda BC$，$DF=\mu DC$，若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\dfrac{2}{3}$，则 $\lambda+\mu=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{5}{6}$　　D. $\dfrac{7}{12}$

分析 如图，统一起点为 A，取基底 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$，则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=4,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=-2.$$



向量 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，因此由 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$ 可得

$$\mu\cdot\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)+(1+\lambda\mu)\cdot\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)+\lambda\cdot\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=1,$$

即

$$4(\lambda+\mu)-2\lambda\mu=3.$$

又由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，从而 $\overrightarrow{CE}=(\lambda-1)\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CF}=(\mu-1)\overrightarrow{AB}$，因此由 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\dfrac{2}{3}$ 可得

$$[\lambda\mu-(\lambda+\mu)+1]\cdot\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{2}{3},$$

即

$$\lambda\mu-(\lambda+\mu)=-\frac{2}{3}.$$

由关于 λ 和 μ 的两个方程不难解得 $\lambda+\mu=\dfrac{5}{6}$.

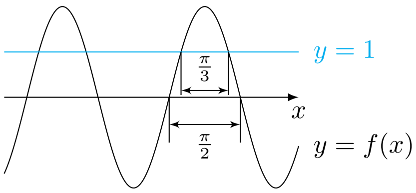
解　C

18.2 咫尺天涯

文科第 8 题． 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x\,(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$．在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中，若相邻交点距离的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）

A. $\dfrac{\pi}{2}$ B. $\dfrac{2\pi}{3}$ C. π D. 2π

分析 由辅助角公式，$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，于是 $\sin(\omega x+\varphi)=\dfrac{1}{2}$，由正弦型函数图象的特点可得曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的相邻交点的距离的最小值为相邻零点距离的 $\dfrac{2}{3}$．因此 $f(x)$ 的半周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，最小正周期为 π，如图．



解 C

18.3 分离变量

理科第 14 题． 已知函数 $f(x)=\left|x^2+3x\right|$，$x\in\mathbf{R}$．若方程 $f(x)-a|x-1|=0$ 恰有 4 个互异的实数根，则实数 a 的取值范围为________．

分析 显然 $x=1$ 不是方程的根，因此题中方程即[1]

$$a=\left|\frac{x^2+3x}{x-1}\right|,$$

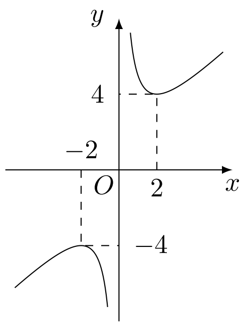
令 $x-1=t$，则上述方程即

$$a=\left|t+\frac{4}{t}+5\right|,$$

也即

$$t+\frac{4}{t}=a-5,\ \text{或}\ t+\frac{4}{t}=-a-5,$$

其中 $a\geqslant 0$．于是题意即函数 $y=t+\dfrac{4}{t}$ 的图象与直线 $y=a-5$ 和直线 $y=-a-5$ 均有两个公共点 (这里利用了函数 $y=t+\dfrac{4}{t}$ 图象的特点)，如图．



[1] 详见附录『分离变量法』

因此有

$$\begin{cases} a>0, \\ -a-5<-4, \\ a-5<-4 \text{ 或 } a-5>4, \end{cases}$$

解得 $0<a<1$ 或 $a>9$，因此实数 a 的取值范围是 $(0,1)\cup(9,+\infty)$．

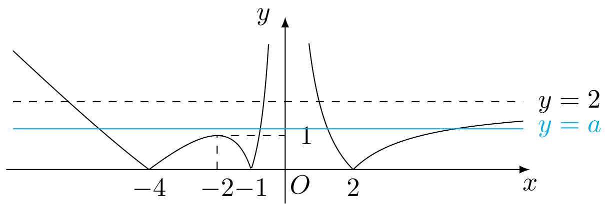
解　$(0,1)\cup(9,+\infty)$

文科第 14 题． 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \left|x^2+5x+4\right|, & x\leqslant 0, \\ 2\left|x-2\right|, & x>0, \end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-a|x|$ 恰有 4 个零点，则实数 a 的取值范围为________．

分析　显然 $x=0$ 不是函数 $y=f(x)-a|x|$ 的零点，因此 $x\neq 0$．分离变量，并设函数

$$g(x)=\begin{cases} \left|x+\dfrac{4}{x}+5\right|, & x<0, \\ 2\left|1-\dfrac{2}{x}\right|, & x>0, \end{cases}$$

则问题转化为直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有 4 个公共点，如图．



注意到 $y=\left|x+\dfrac{4}{x}+5\right|$，$x<0$ 的极大值为 1，而 $y=2\left|1-\dfrac{2}{x}\right|$ 的渐近线为 $y=2$，因此可得 a 的取值范围是 $(1,2)$．

解　$(1,2)$

18.4　坠入椭圆的圆

理科第 18 题． 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，右顶点为 A，上顶点为 B，已知 $|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$．

(1) 求椭圆的离心率；

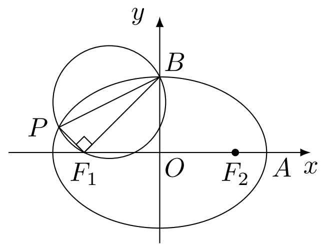
(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1，经过原点 O 的直线 l 与该圆相切．求直线 l 的斜率．

分析　第 (1) 小题考查椭圆的基本量与方程，第 (2) 小题考查直线与椭圆的位置关系以及直线与圆的位置关系，均属于常规问题．

解　(1) 设椭圆的半焦距为 c，则根据题意有

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2c,$$

又 $a^2=b^2+c^2$，因此 $a^2=2c^2$，椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．
(2) 画出示意图，如图．



根据题意，$BF_1\perp PF_1$，因此由直线 BF_1 的斜率为 1 可得直线 PF_1 的斜率为 -1，不妨设 $F_1(-1,0)$，则有直线 PF_1 的方程为 $x=-y-1$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，联立得

$$3y^2+2y-1=0,$$

于是 $y=-1$ (舍去，因为点 P 不为椭圆的顶点) 或 $y=\dfrac{1}{3}$．
当 $y=\dfrac{1}{3}$ 时，可得 $P\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，因此圆的圆心为 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，半径为 $\sqrt{\dfrac{5}{9}}$．由于直线 $x=0$ 不与该圆相切，因此设直线 l 的方程为 $y=kx$，有

$$\frac{\left|-\dfrac{2}{3}k-\dfrac{2}{3}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{5}{9}},$$

解得 $k=4\pm\sqrt{15}$．

18.5 如来掌心

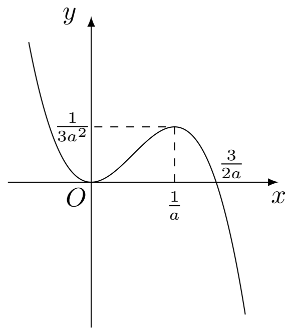
文科第 19 题． 已知函数 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}ax^3\,(a>0)$，$x\in\mathbf{R}$．
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值；
(2) 若对于任意的 $x_1\in(2,+\infty)$，都存在 $x_2\in(1,+\infty)$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，求 a 的取值范围．

分析 *第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性和极值，第 (2) 小题考查利用导数研究函数的值域，均属于常规问题．其中准确转化第 (2) 小题中的全称命题是解决问题的关键．*

解 (1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2ax\left(\frac{1}{a}-x\right),$$

因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $x=0$ 处取极小值 $f(0)=0$，在 $x=\dfrac{1}{a}$ 处取极大值 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{3a^2}$．
因此函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$；极大值为 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{3a^2}$，极小值为 $f(0)=0$．
(2) 函数 $f(x)$ 的零点为 $x=0$ 和 $x=\dfrac{3}{2a}$，图象如图．



显然 $2 \geqslant \dfrac{3}{2a}$ ，即 $a \geqslant \dfrac{3}{4}$ ，否则取 $x_1 = \dfrac{3}{2a}$ ，$f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$ ，不符合题意；
当 $a = \dfrac{3}{4}$ 时，由于 $f(x_1)$ 的取值范围是 $(-\infty, 0)$ ，而 $f(x_2)$ 可以取遍所有负实数，因此符合题意；
当 $a > \dfrac{3}{4}$ 时，问题转化为函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域包含

$$\left\{ \frac{1}{f(x_1)} \,\middle|\, x_1 > 2 \right\} = \left(\frac{1}{f(2)}, 0 \right),$$

于是 $1 \leqslant \dfrac{3}{2a}$ ，即 $a \leqslant \dfrac{3}{2}$ ；
综上所述，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2} \right]$.

18.6　极值点偏移

理科第 20 题.　已知函数 $f(x) = x - a\mathrm{e}^x \, (a \in \mathbf{R})$ ，$x \in \mathbf{R}$ ，已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 证明 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大；

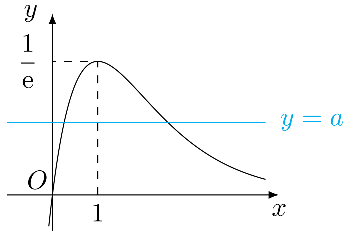
(3) 证明 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.

分析　*第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的零点，第 (2) 小题在第 (1) 小题的基础上稍加分析即得. 第 (3) 小题中 $x_1 + x_2$ 无法用 a 直接表示，因此需要根据第 (2) 小题的提示，取 $t = \dfrac{x_2}{x_1}$ 作为中间变量构造函数研究其单调性.*

解　(1) 根据题意，方程 $x - a\mathrm{e}^x = 0$ 有两个实根，也即方程 $a = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 有两个实根.
设 $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ ，则其导函数

$$g'(x) = \frac{-x+1}{\mathrm{e}^x},$$

因此函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，在 $x = 1$ 处取得极大值，同时也是最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ，如图.



由于当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，因此若 $a\leqslant 0$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象不可能有两个公共点，不符合题意；由于 $g(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，当且仅当 $x=1$ 时取得，因此当 $a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，也不符合题意.

当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由于 $g(0)=0<a$，$g(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}>a$，$g\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}<a$[1]，因此直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个公共点，横坐标分别为 x_1,x_2，符合题意.

综上所述，a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(2) 根据第 (1) 小题的结果，有 $0<x_1<1<x_2<\dfrac{1}{a}$. 由于函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，于是 x_1 随着 a 的减小而减小，x_2 随着 a 的减小而增大，从而 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大，原命题得证.

(3) 根据题意，有

$$\ln x_1=\ln a+x_1,\ln x_2=\ln a+x_2,$$

两式相减得

$$\ln\frac{x_2}{x_1}=x_2-x_1.$$

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}\,(\,t>1\,)$，不难解得

$$x_1=\frac{\ln t}{t-1},x_2=\frac{t\ln t}{t-1},$$

于是 $x_1+x_2=\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t$.

令 $\varphi(t)=\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t\,,t>1$，则其导函数

$$\varphi'(t)=\frac{-2\ln t+t-\dfrac{1}{t}}{(t-1)^2},$$

再令 $\mu(t)=-2\ln t+t-\dfrac{1}{t}$，则其导函数

$$\mu'(t)=\left(\frac{t-1}{t}\right)^2\geqslant 0,$$

因此函数 $\mu(t)$ 单调递增，于是当 $t>1$ 时，$\mu(t)>\mu(1)=0$，进而在 $t>1$ 时，$\varphi'(t)>0$，因此函数 $\varphi(t)$ 在 $t>1$ 时单调递增，也即 x_1+x_2 随着 t 的增大而增大.

又根据第 (2) 小题的结果，t 随着 a 的减小而增大，因此 x_1+x_2 随着 a 的减小而增大，原命题得证.

18.7 三进制

文科第 20 题. 已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数. 设集合 $M=\{0,1,2,\cdots,q-1\}$，集合 $A=\left\{x\mid x=x_1+x_2q+\cdots+x_nq^{n-1},x_i\in M,i=1,2,\cdots,n\right\}$.

(1) 当 $q=2$，$n=3$ 时，用列举法表示集合 A；

(2) 设 $s,t\in A$，$s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$，$t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$，其中 $a_i,b_i\in M$，$i=1,2,\cdots,n$. 证明：若 $a_n<b_n$，则 $s<t$.

---

[1] 当 $x>0$ 时，函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ 在 $x=2$ 处取得极小值，同时也是最小值为 $\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}>1$，因此 $a^2\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}>1$.

分析 第 (1) 小题直接应用定义可得，第 (2) 小题作差比较稍加放缩即可，本题本质为 q 进制数.

解　(1) 枚举如下:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
x	0	4	2	6	1	5	3	7

因此 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

(2) 若 $a_n<b_n$ ，则 $a_n-b_n\leqslant -1$ ，又 $a_i-b_i\leqslant q-1$ ， $i=1,2,\cdots,n-1$ ，因此

$$\begin{aligned}
s-t&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)q\cdots+(a_n-b_n)q^{n-1}\\
&\leqslant (q-1)+(q-1)q+\cdots+(q-1)q^{n-2}-q^{n-1}\\
&=q-1+q^2-q+\cdots+q^{n-1}-q^{n-2}-q^{n-1}\\
&=-1<0,
\end{aligned}$$

因此 $s<t$.

第十九章　浙江卷

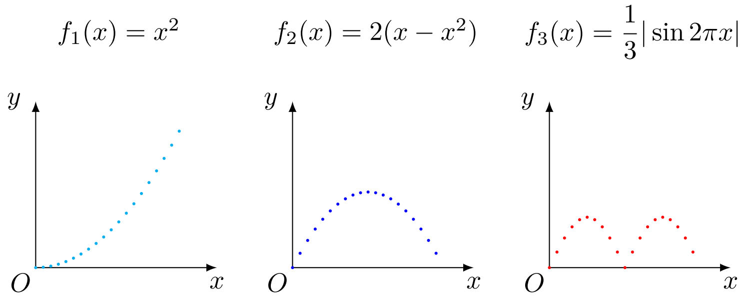
19.1　函数的位差和

理科第 10 题． 设函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=2\left(x-x^2\right)$，$f_3(x)=\dfrac{1}{3}|\sin 2\pi x|$，$a_i=\dfrac{i}{99}$，$i=0,1,2,\cdots,99$．记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$， $k=1,2,3$，则（　　）

A. $I_1<I_2<I_3$　　　　B. $I_2<I_1<I_3$

C. $I_1<I_3<I_2$　　　　D. $I_3<I_2<I_1$

分析 如图（为了便于观察，将原题中的 100 个点修改为了 20 个点），所求 I_k 的几何意义就是散点图的相邻点位差的总和（简称位差和）．定义函数图象的位差和为自变量从 0 到 1 上变化时，对应的函数图象上的点在 y 轴上的投影所经过的路程．比较散点图和函数图象可知，如果出现"高峰"或者"低谷"，则可能有位差和的损失．而避免位差和损失的唯一方法就是将"峰顶"或者"谷底"包含在离散点集内．对于左图和中图，函数图象的位差和显然为 1，因此很容易得到 $I_1=1$，而 $I_2<1$（因为 $a_i\neq\dfrac{1}{2}$，$i=0,1,2,\cdots,99$）．对于右图，图象的位差和为 $\dfrac{4}{3}$，在转化为散点图的时候位差和有所损失，但损失极小[1]，因此 $I_3\approx\dfrac{4}{3}$．于是 $I_2<I_1=1<I_3<\dfrac{4}{3}$．



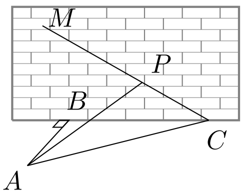
解　B

19.2　瞄准射击

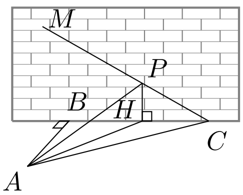
理科第 17 题/文科第 10 题．　如图，某人在垂直于水平地面 ABC 的墙面前的点 A 处进行射击训练．已知点 A 到墙面的距离为 AB，某目标点 P 沿墙面上的射线 CM 移动，此人为了准确瞄准目标点 P，需

[1]位差和的损失为 $\dfrac{2}{3}\left(1-\sin\dfrac{50\pi}{99}\right)+\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{98\pi}{99}+\dfrac{2}{3}\left(1-\sin\dfrac{148\pi}{99}\right)<\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi}{99}<0.2$

计算由点 A 观察点 P 的仰角 θ 的大小．若 $AB=15\ \mathrm{m}$ ，$AC=25\ \mathrm{m}$ ，$\angle BCM=30^\circ$ ，则 $\tan\theta$ 的最大值是[1]________．(仰角 θ 为直线 AP 与平面 ABC 所成角)



分析 过 P 作 BC 的垂线，垂足设为 H .



$$\tan\angle PAH=\frac{PH}{AH}=\frac{CH}{\sqrt{3}AH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\angle HAC}{\sin\angle HCA}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{15}{25}}=\frac{5}{9}\sqrt{3},$$

等号当且仅当 $\angle HAC=90^\circ$ 时取得．因此所求的最大值为 $\dfrac{5}{9}\sqrt{3}$.

解 $\dfrac{5}{9}\sqrt{3}$

拓展 从另一个方面看，角 θ 的最大值即平面 MAC 与地面 ABC 所成的二面角的大小．

19.3 举一反三

文科第 17 题． 设直线 $x-3y+m=0\,(m\neq 0)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A,B ，若点 $P\,(m,0)$ 满足 $|PA|=|PB|$ ，则该双曲线的离心率是________．

分析 设弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$ ，则根据题意，有

$$\begin{cases}x_0-3y_0+m=0,\\ \dfrac{y_0-0}{x_0-m}\cdot\dfrac{1}{3}=-1,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}x_0=\dfrac{4}{5}m,\\ y_0=\dfrac{3}{5}m,\end{cases}$$

因此 $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{3}{4}$.

另一方面，由双曲线的“垂径定理”[2]，有

$$\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{1}{3}=\frac{b^2}{a^2},$$

从而 $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{3b^2}{a^2}$.

因此有 $a^2=4b^2$ ，进而可得该双曲线的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

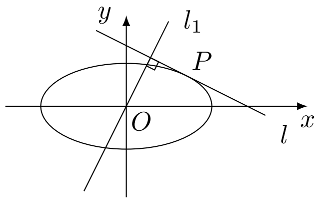
[1]文科第 10 题将填空改为了选择

[2]详见附录『有心二次曲线的“垂径定理”』

解　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

19.4　公切线段

理科第 21 题．　如图，设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，动直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点 P，且点 P 在第一象限．



(1) 已知直线 l 的斜率为 k，用 a,b,k 表示点 P 的坐标；

(2) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直，证明：点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a-b$．

分析　*第 (1) 小题考查直线与椭圆的位置关系*[1]*．在第 (1) 小题的基础上很容易解决第 (2) 小题．*

解　(1) 设 $P(x_0,y_0)$，则 P 点可以用方程

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$$

表示，于是在 P 点与椭圆 C 形成的交点曲线系

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\lambda\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

中，令 $\lambda=-1$，则得到切线 $l:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．因此由

$$\begin{cases}-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}=k,\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1,\end{cases}\qquad \text{解得}\ \begin{cases}x_0=\dfrac{-a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\\ y_0=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}.\end{cases}$$

因此点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{-a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right)$．

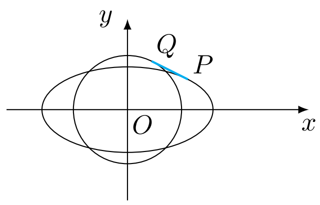
(2) 根据题意，直线 $l_1:x+ky=0$，因此点 P 到直线 l_1 的距离为

$$\begin{aligned}\frac{|x_0+ky_0|}{\sqrt{1+k^2}}&=\frac{\left|\dfrac{-a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}+\dfrac{b^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right|}{\sqrt{1+k^2}}\\&=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2+a^2k^2+\dfrac{b^2}{k^2}}}\\&\leqslant\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}\\&=a-b,\end{aligned}$$

[1]详见『圆锥曲线的切线方程』

等号当且仅当 $k=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 时取得 (因为 P 点在第一象限). 因此点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a-b$.

拓展 此题本质即椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 与圆 $x^2+y^2=r^2\,(\,b<r<a\,)$ 的公切线段长度的最大值为 $a-b$.



19.5 函数的极差

理科第 22 题. 已知函数 $f\,(x)=x^3+3\,|x-a|\,(a\in\mathbf{R})$.
(1) 若 $f\,(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值分别记为 $M\,(a)\,,m\,(a)$, 求 $M\,(a)-m\,(a)$;
(2) 设 $b\in\mathbf{R}$, 若 $[f\,(x)+b]^2\leqslant 4$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立, 求 $3a+b$ 的取值范围.

分析 第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的最值, 恰当的展开讨论是解决问题的关键. 第 (2) 小题是在第 (1) 小题基础上的拓展问题, 用 a 表示 $3a+b$, 利用规划思想解决即可.

解 (1) 根据题意, 有

$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a, & x>a,\\ a^3, & x=a,\\ x^3-3x+3a, & x<a,\end{cases}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+3, & x>a,\\ 3x^2-3, & x<a.\end{cases}$$

按 a 与 $-1,1$ 的大小关系展开讨论.

情形一, 当 $a\leqslant -1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增, 因此 $M(a)=f(1)=4-3a$, $m(a)=f(-1)=-4-3a$.

情形二, 当 $-1<a<1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1,a]$ 上单调递减, 在 $[a,1]$ 上单调递增, 因此

$$M(a)=\max\{f(-1),f(1)\}=\begin{cases}4-3a,-1<a\leqslant\dfrac{1}{3},\\ 2+3a,\dfrac{1}{3}<a<1,\end{cases}$$

而 $m(a)=f(a)=a^3$.

情形三, 当 $a\geqslant 1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减, 因此 $M(a)=f(-1)=2+3a$, $m(a)=f(1)=-2+3a$.

综上所述,

$$M(a)-m(a)=\begin{cases}8,a\leqslant -1,\\ -a^3-3a+4,-1<a\leqslant \dfrac{1}{3},\\ -a^3+3a+2,\dfrac{1}{3}<a<1,\\ 4,a\geqslant 1.\end{cases}$$

(2) 根据题意，有 $-2-b\leqslant f(x)\leqslant 2-b$ ，也即 $M(a)\leqslant 2-b$ 且 $m(a)\geqslant -2-b$.

情形一，当 $a\leqslant -1$ 时，有

$$\begin{cases}4-3a\leqslant 2-b,\\ -4-3a\geqslant -2-b,\end{cases}$$

即

$$2+6a\leqslant 3a+b\leqslant -2+6a,$$

显然无解.

情形二，当 $-1<a\leqslant \dfrac{1}{3}$ 时，有

$$\begin{cases}4-3a\leqslant 2-b,\\ a^3\geqslant -2-b,\end{cases}$$

即

$$-a^3+3a-2\leqslant 3a+b\leqslant 6a-2.$$

情形三，当 $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时，有

$$\begin{cases}2+3a\leqslant 2-b,\\ a^3\geqslant -2-b,\end{cases}$$

即

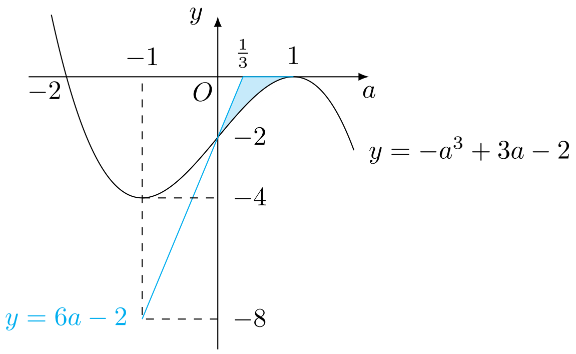
$$-a^3+3a-2\leqslant 3a+b\leqslant 0.$$

情形四，当 $a\geqslant 1$ 时，有

$$\begin{cases}2+3a\leqslant 2-b,\\ -2+3a\geqslant -2-b,\end{cases}$$

即 $3a+b=0$.

接下来求解情形二和情形三中的不等式组，由于 $-a^3+3a-2-(6a-2)=-a(a^2+3)$ ，因此在 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 上曲线 $y=-a^3+3a-2$ 与直线 $y=6a-2$ 只有一个交点 $(0,-2)$. 如图，画出曲线 $y=-a^3+3a-2$ 与直线 $y=6a-2$ ，可得图中的阴影部分内 (包括边界) 的点的纵坐标的取值范围即 $3a+b$ 的取值范围.



因此当 $-1<a<1$ 时，$3a+b$ 的取值范围是 $[-2,0]$.

综合以上四种情形，可得 $3a+b$ 的取值范围是 $[-2,0]$.

文科第 **21** 题. 已知函数 $f(x)=x^3+3|x-a|\,(a>0)$ ，若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值记为 $g(a)$.

(1) 求 $g(a)$;

(2) 证明：当 $x\in[-1,1]$ 时，恒有 $f(x)\leqslant g(a)+4$.

分析 *此题为理科第 22 题的削弱版本，参见理科第 22 题的分析.*

解 (1) 根据题意，有

$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a, & x>a,\\ a^3, & x=a,\\ x^3-3x+3a, & x<a,\end{cases}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+3, & x>a,\\ 3x^2-3, & x<a.\end{cases}$$

按 a 与 $-1,1$ 的大小关系展开讨论.

情形一，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,a]$ 上单调递减，在 $[a,1]$ 上单调递增，因此 $g(a)=f(a)=a^3$;

情形二，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，因此 $g(a)=f(1)=-2+3a$.

综上所述，

$$g(a)=\begin{cases}a^3, 0<a<1,\\ -2+3a, a\geqslant 1.\end{cases}$$

(2) 情形一，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,a]$ 上单调递减，在 $[a,1]$ 上单调递增，因此函数 $f(x)$ 的最大值

$$h(a)=\max\{f(-1),f(1)\}=\begin{cases}4-3a, 0<a\leqslant\dfrac{1}{3},\\ 2+3a, \dfrac{1}{3}<a<1.\end{cases}$$

情形二，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，因此函数 $f(x)$ 的最大值 $h(a)=f(-1)=2+3a$.

因此当 $x \in [-1,1]$ ，恒有

$$f(x)-g(a)-4 \leqslant h(a)-g(a)-4=\begin{cases}-a^3-3a, 0<a\leqslant \dfrac{1}{3},\\ -a^3+3a-2, \dfrac{1}{3}<a<1,\\ 0, a\geqslant 1,\end{cases}$$

而在 $0<a\leqslant \dfrac{1}{3}$ 时，有

$$-a^3-3a=-a(a^2+3)<0.$$

在 $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时，有

$$-a^3+3a-2=-(a-1)^2(a+2)<0.$$

因此当 $x\in[-1,1]$ 时，有 $f(x)-g(a)-4\leqslant 0$ 恒成立，原命题得证.

19.6　运筹帷幄

文科第 **22** 题.　已知 $\triangle ABP$ 的三个顶点都在抛物线 $C: x^2=4y$ 上， F 为抛物线 C 的焦点，点 M 为 AB 的中点， $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$.

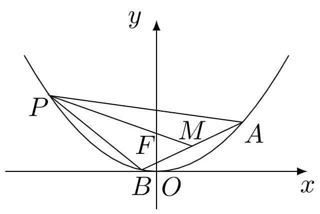
(1) 若 $|PF|=3$ ，求点 M 的坐标;

(2) 求 $\triangle ABP$ 面积的最大值.

分析　*第 (1) 小题考查抛物线的定义与向量的线性运算. 第 (2) 小题是经典的面积问题，利用抛物线上的点很容易用单一参数表达的特点，引入点 P 的坐标为参数，对点 A 和点 B 的坐标采取设而不求的策略，并将面积作适当转化. 得到面积关于参数的表达式后，换元配合三元均值即可得到最大值.*

解　(1) 若 $|PF|=3$ ，则 P 的纵坐标为 2 ，因此 P 点横坐标为 $\pm 2\sqrt{2}$ ，因此由 $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$ 可得点 M 的坐标为 $\left(\mp\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

(2) 设点 $P(4t,4t^2)$ ， $A(4t_1,4t_1^2)$ ， $B(4t_2,4t_2^2)$.



由 $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$ 以及 $F(0,1)$ 可得 $M\left(-\dfrac{4}{3}t,-\dfrac{4}{3}t^2+\dfrac{4}{3}\right)$ ，因此

$$\begin{cases}2(t_1+t_2)=-\dfrac{4}{3}t,\\ 2(t_1^2+t_2^2)=-\dfrac{4}{3}t^2+\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

直线 AB 的斜率为

$$\frac{4t_1^2-4t_2^2}{4t_1-4t_2}=t_1+t_2=-\frac{2}{3}t,$$

因此直线 AB 的方程为

$$y=-\frac{2}{3}t\left(x+\frac{4}{3}t\right)-\frac{4}{3}t^2+\frac{4}{3},\quad \text{即 } y=-\frac{2}{3}tx-\frac{20}{9}t^2+\frac{4}{3}.$$

由于 $\overrightarrow{PF}=3\overrightarrow{FM}$，因此三角形 PAB 的面积是三角形 FAB 面积的 4 倍，于是三角形 PAB 的面积

$$\begin{aligned}S&=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}t\right)^2}\cdot|4t_1-4t_2|\cdot\frac{\left|\frac{20}{9}t^2-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1+\frac{4}{9}t^2}}\\&=\frac{8}{9}\cdot|t_1-t_2|\cdot|20t^2-3|\\&=\frac{8}{9}\cdot\sqrt{2(t_1^2+t_2^2)-(t_1+t_2)^2}\cdot|20t^2-3|\\&=\frac{16}{27}\cdot\sqrt{3-4t^2}\cdot|20t^2-3|,\end{aligned}$$

令 $m=\sqrt{3-4t^2}$，则

$$\begin{aligned}S&=\frac{16}{27}m\cdot|5m^2-12|\\&=\frac{16}{27}\sqrt{m^2\cdot(12-5m^2)\cdot(12-5m^2)}\\&=\frac{16}{27}\sqrt{\frac{1}{10}\cdot10m^2\cdot(12-5m^2)\cdot(12-5m^2)}\\&\leqslant\frac{16}{27}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{24}{3}\right)^3}\\&=\frac{256\sqrt{5}}{135},\end{aligned}$$

等号当且仅当 $10m^2=12-5m^2$，即 $m^2=\frac{4}{5}$，也即 $t^2=\frac{11}{20}$ 时取得．因此所求三角形 PAB 面积的最大值为 $\frac{256\sqrt{5}}{135}$．