解析几何

课程目标

❑ 截距坐标公式（考试要求：**B**，考查频率：**0.02**，难度：**3.00**）

1. 理解并掌握截距坐标公式；
2. 能够利用截距坐标公式简化运算.

❑ 面积坐标公式（考试要求：**B**，考查频率：**0.01**，难度：**3.20**）

1. 理解并掌握面积坐标公式；
2. 能够利用面积坐标公式简化运算.

❑ 椭圆的焦半径公式 **I**(考试要求：**C**，考查频率：**0.00**，难度：**3.00**)

1. 理解并掌握椭圆的焦半径公式 I 及其推导；
2. 能够在合适的情形下选择椭圆的焦半径公式 I 简化运算.

❑ 椭圆的焦半径公式 **II**(考试要求：**C**，考查频率：**0.02**，难度：**3.20**)

1. 理解并掌握椭圆的焦半径公式 II 及其推导；
2. 能够在合适的情形下选择椭圆的焦半径公式 II 简化运算.

❑ 椭圆的焦点三角形面积公式（考试要求：**C**，考查频率：**0.01**，难度：**2.33**）

1. 理解并掌握椭圆的焦点三角形面积公式及其推导；
2. 能够在合适的情形下选择椭圆的焦点三角形面积公式简化运算.

❑ 椭圆的光学性质（考试要求：**B**，考查频率：**0.02**，难度：**3.60**）

1. 理解并掌握椭圆的光学性质及其推导；
2. 能够利用椭圆的光学性质简化问题；
3. 了解一些实际生活中利用椭圆的光学性质的例子.

❑ 椭圆的垂径定理（考试要求：**C**，考查频率：**0.03**，难度：**3.00**）

1. 理解并掌握椭圆的垂径定理及其推导；
2. 能够利用椭圆的垂径定理简化问题；
3. 理解并掌握椭圆的垂径定理下的判别式.

❑ 椭圆上的四点共圆 (考试要求：**B**，考查频率：**0.00**，难度：**3.00**)

1. 理解并掌握椭圆上的四点共圆的性质及其推导；
2. 能够利用椭圆上的四点共圆的性质简化问题.

❑ 椭圆的蒙日圆 (考试要求：**B**，考查频率：**0.00**，难度：**3.00**)

1. 理解并掌握椭圆的蒙日圆的性质及其推导；
2. 能够利用椭圆的蒙日圆的性质简化问题.

知识讲解

❑ 截距坐标公式

截距坐标公式　已知点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$，且 $x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$，则直线 AB 的横截距和纵截距分别为

$$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1},\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}.$$

证明　设直线 AB 经过点 $(a,0)$，$(0,b)$，则有

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-0}{x_1-a}=\frac{y_1-b}{x_1-0},$$

解得

$$a=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1},b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2},$$

因此命题得证.

记忆方法　分子可以参考面积坐标公式，分母是分子中分别隐藏横坐标（求横截距时）和纵坐标（求纵截距时）的结果.

❑ 面积坐标公式

引理　坐标平面 xOy 中，已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\triangle OAB$ 的面积

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

证明　直线 OA 的方程为 $y_1x-x_1y=0$，于是 $\triangle OAB$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot|OB|\cdot d(B,OA)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,$$

因此命题得证.

三角形面积坐标公式　坐标平面内由点 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ， $C(x_3,y_3)$ 围成的 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)\right|,$$

特别地，设坐标原点为 O ，那么 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$.

证明　根据引理，可得 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\left|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right|=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)\right|,$$

因此命题得证.

记忆方法　为了方便记忆，我们引入行列式符号来帮助记忆，有

$$\vec{S}_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix},\vec{S}_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}.$$

椭圆的焦半径公式 I

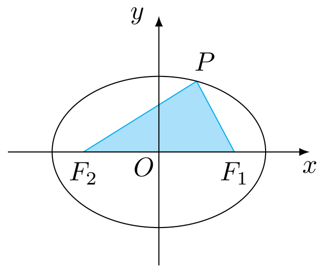
由椭圆的方程的推导过程，可以得到下面的推论.

椭圆的焦半径公式 I 对左、右焦点分别为 F_1,F_2 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （ $a>b>0$ ）上一点 $P(x_0,y_0)$ 有

$$|PF_1|=a+ex_0,|PF_2|=a-ex_0.$$

椭圆的焦半径公式 II

由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ $a>b>0$ 上的一点 P 与椭圆的两个焦点 $F_1(-c,0)$ ， $F_2(c,0)$ 构成的三角形称为椭圆的焦点三角形. 椭圆的焦点三角形是椭圆问题中的最基本的图形，其中已经有条件 $F_1F_2=2c$ 和 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ ，因此只需要再额外增加一个条件就可以解三角形.



当 $\theta=\angle PF_1F_2$ 已知时，对 $\triangle PF_1F_2$ 应用余弦定理，有

$$|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2\cdot|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\theta,$$

即

$$(2a-|PF_1|)^2=|PF_1|^2+(2c)^2-2\cdot|PF_1|\cdot 2c\cdot\cos\theta,$$

整理可得

$$|PF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta},$$

接下来利用 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 就可以计算出 $|PF_2|$ 的值. 这样我们就得到了

椭圆的焦半径公式 II 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$）的焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$，底角 $\angle PF_1F_2=\theta$，则

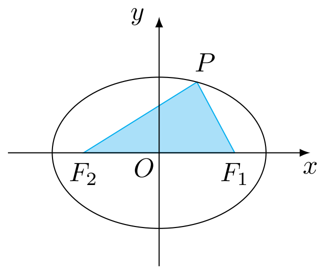
$$|PF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta},$$

其中 c 为椭圆的半焦距.

由于大部分包含焦半径的情形下，椭圆上的点 P 的横坐标是未知的，因此椭圆的焦半径公式 II 比椭圆的焦半径公式 I 更加实用.

椭圆的焦点三角形面积公式

由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$ 上的一点 P 与椭圆的两个焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 构成的三角形称为 椭圆的焦点三角形. 椭圆的焦点三角形是椭圆问题中的最基本的图形，其中已经有条件 $F_1F_2=2c$ 和 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，因此只需要再额外增加一个条件就可以解三角形.



当 $\theta=\angle F_1PF_2$ 已知时，对 $\triangle PF_1F_2$ 应用余弦定理，有

$$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\theta,$$

即

$$|F_1F_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot(1+\cos\theta),$$

于是可得

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}.$$

接下来构造关于 t 的一元二次方程

$$t^2-2at+\frac{2b^2}{1+\cos\theta}=0$$

就可以求出 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$ 的具体值. 同时，顺便得到了

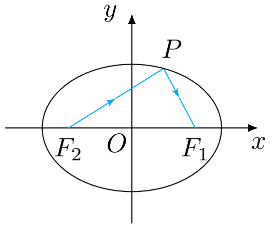
椭圆的焦点三角形面积公式 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$ 的顶角 $\angle F_1PF_2=\theta$，

则其面积

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{b^2 \sin\theta}{1+\cos\theta} = b^2 \tan\frac{\theta}{2}.$$

椭圆的光学性质

椭圆的光学性质　从椭圆的一个焦点出发的光线经过椭圆反射后的反射光线经过椭圆的另一个焦点，也即焦点为 F_1, F_2 的椭圆上任意一点 P 处的切线 l 与直线 PF_1 和直线 PF_2 所成的角相等.



证明　角相等推相切　　一方面，如果直线 l 与直线 PF_1 和直线 PF_2 所成的角相等，那么 P 点是直线 l 上到点 F_1 和点 F_2 距离之和最小的点（即将军饮马问题）. 而另一方面，椭圆上的点到点 F_1 和点 F_2 的距离之和相等. 由于直线 l 上除 P 以外的所有点到点 F_1 和点 F_2 距离之和均大于 $|PF_1|+|PF_2|$，因此直线 l 与椭圆有且仅有一个公共点 P，也即直线 l 与椭圆相切.

切推角相等　　以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）为例. 设切点坐标为 $P(x_0,y_0)$，则切线 $l: \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，令

$$k_1=\frac{y_0}{x_0-c}, k_2=\frac{y_0}{x_0+c}, k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0},$$

则只需要证明

$$\frac{k_1+k_2}{1-k_1\cdot k_2}=\frac{2k}{1-k^2},$$

将 k_1,k_2,k 代入化简即得.

椭圆的垂径定理

椭圆的垂径定理　已知不过原点的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 交于 A,B 两点，M 为弦 AB 的中点，则直线 AB 与直线 OM 的斜率之积

$$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}.$$

证明　　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

两式相减，有

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0,$$

两边同时除以 $x_1^2-x_2^2$，并化简可得

$$\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{b^2}{a^2},$$

利用平方差公式变形，有

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-0}=-\frac{b^2}{a^2},$$

此即欲证性质.

推论 有心二次曲线的弦与其中点和中心的连线的斜率之积为 e^2-1，其中 e 为有心二次曲线的离心率.

有心二次曲线的“垂径定理”与仿射变换有千丝万缕的联系，因此往往可以联合使用

❏ 椭圆上的四点共圆

考虑非圆二次曲线 $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$（$A\neq B$）与两条相交直线 $(y-k_1x-b_1)\cdot(y-k_2x-b_2)=0$（$k_1\neq k_2$）形成的交点曲线系

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F-\lambda\cdot(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)=0,$$

当且仅当 $k_1+k_2=0$ 时该方程表示圆，所以有：

已知二次曲线上四点 A,B,C,D，若 AB,CD 斜率均存在，则 AB 与 CD 的斜率互为相反数与 A,B,C,D 四点共圆等价.

❏ 椭圆的蒙日圆

对于一般的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$），其互相垂直的切线的交点形成的轨迹为 $x^2+y^2=a^2+b^2$. 这个圆叫做蒙日圆，它的发现人是法国几何学家蒙日（G. Monge，1746-1818）. 蒙日圆的进一步推广是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的任意两条夹角为 θ 的切线的交点的轨迹方程是

$$\left(x^2+y^2-a^2-b^2\right)^2\tan^2\theta=4b^2x^2+4a^2y^2-4a^2+b^2.$$

此外，对于抛物线 $y^2=2px$（$p>0$），任意两条互相垂直的切线的交点的轨迹是直线 $x=-\frac{p}{2}$.

典型例题

❏ 截距坐标公式

例题 1

（★★★）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过 $A(2,0),B(0,1)$ 两点.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求

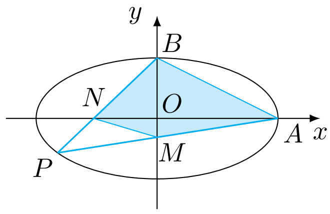
证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

答案 （1） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ；
（2） 定值为 2 .

解析 （1） 根据题意，有 $a=2$ ， $b=1$ ，于是椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,$$

其离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
（2） 四边形 $ABNM$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|AN|\cdot|BM|$.



设 P 点坐标为 $(2\cos\theta,\sin\theta)$ ，可求得 M 点坐标为 $\left(0,\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ ， N 点坐标为 $\left(\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)$ ，故

$$|AN|\cdot|BM|=\left|\left(\frac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}-2\right)\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-1\right)\right|=2\left|\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}\right|=4,$$

故四边形 $ABNM$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|AN|\cdot|BM|=2$
因此原命题得证.

例题 2
(★★★) 已知抛物线 $C:y^2=2x$ ，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
(1) 证明：坐标原点 O 在圆 M 上；
(2) 设圆 M 过点 $P(4,-2)$ ，求直线 l 与圆 M 的方程.

答案 （1） 略；
（2） 当直线 l 的方程为 $y=x-2$ 时，圆 M 的方程为

$$(x-3)^2+(y-1)^2=10.$$

当直线 l 的方程为 $y=-2x+4$ 时，圆 M 的方程为

$$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}.$$

.

解析 (1) 设 $A(2a^2,2a)$ ，$B(2b^2,2b)$ ，则

$$\frac{2a^2\cdot 2b-2b^2\cdot 2a}{2b-2a}=-2ab=2,$$

即 $ab=-1$ ，因此

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2a^2\cdot 2b^2+2a\cdot 2b=4ab(ab+1)=0,$$

因此命题得证.

(2) 根据题意，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(2a^2-4)(2b^2-4)+(2+2a)(2+2b)\\&=4a^2b^2-8(a^2+b^2)+4ab+4(a+b)+20\\&=-8\left[(a+b)^2-2ab\right]+4(a+b)+20\\&=-8(a+b)^2+4(a+b)+4\\&=0,\end{aligned}$$

解得 $a+b=1$ 或 $a+b=-\frac{1}{2}$. 而直线 l 的方程为

$$x=\frac{2a^2-2b^2}{2a-2b}y+2,$$

即

$$x=(a+b)y+2,$$

圆 M 的圆心坐标为 $\left(a^2+b^2,a+b\right)$ ，因此当 $a+b=1$ 时，直线 l 的方程为 $y=x-2$ ，圆 M 的圆心坐标为 $(3,1)$ ，圆 M 的方程为

$$(x-3)^2+(y-1)^2=10.$$

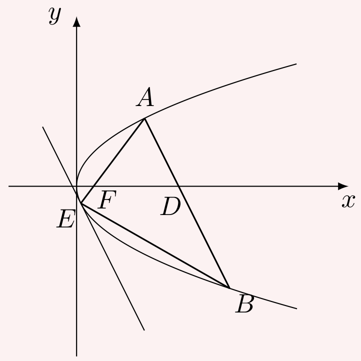
当 $a+b=-\frac{1}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $y=-2x+4$ ，圆 M 的圆心坐标为 $\left(\frac{9}{4},-\frac{1}{2}\right)$ ，圆 M 的方程为

$$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}.$$

❑ 面积坐标公式

例题 3

(★★★★) 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点为 F ，A 为抛物线上一点，D 为 x 轴正半轴上一点，且 $|FA|=|FD|$ ，直线 AD 交抛物线于另一点 B . 抛物线在 E 点处的切线与直线 AB 平行.



（1）求证：直线 AE 恒过定点；

（2）求 $\triangle EAB$ 的面积的最小值.

答案 （1）略；

（2）$8p^3$.

解析 （1）设 $A(2pa^2,2pa)$ ，$B(2pb^2,2pb)$ ，则根据抛物线的平均性质，有 D 点的横坐标

$$p+2pa^2=-2pab,$$

即

$$a+b=-\frac{1}{2a}.$$

根据抛物线的平均性质有 E 点的纵坐标为 $p(a+b)$ ，于是 E 点的横坐标为 $\dfrac{p(a+b)^2}{2}$ ，再根据抛物线的平均性质，可得直线 AE 的横截距为

$$\sqrt{\frac{p(a+b)^2}{2}\cdot 2pa^2}=-pa(a+b)=\frac{p}{2},$$

因此直线 AE 恒过点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.

备注 事实上，过点 E 作 x 轴的平行线 k ，则由 $\angle FAB=\angle FDA$ ，又 AB 与切线平行，可得切线与 AE 和 l 所成角相等，因此根据抛物线的光学性质，可得直线 AE 恒过点 F .

（2）E 点坐标 $\left(\dfrac{p(a+b)^2}{2},p(a+b)\right)$ ，$A(2pa^2,2pa)$ ，$B(2pb^2,2pb)$ ，于是根据三角形面积坐标公式，可得 $\triangle EAB$ 的有向面积

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S}&=\begin{vmatrix}2pa^2-\dfrac{p(a+b)^2}{2} & 2pa-p(a+b)\\ 2pb^2-\dfrac{p(a+b)^2}{2} & 2pb-p(a+b)\end{vmatrix}\\&=p^2(a-b)\cdot\begin{vmatrix}2a^2-\dfrac{(a+b)^2}{2} & 1\\ 2b^2-\dfrac{(a+b)^2}{2} & -1\end{vmatrix},\end{aligned}$$

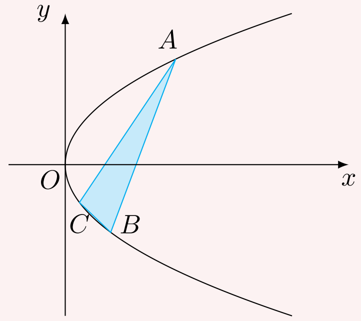
于是 $\triangle EAB$ 的面积

$$\begin{aligned}S&=p^2\cdot|a-b|\cdot\left|2(a^2+b^2)-(a+b)^2\right|\\&=p^2\cdot|a-b|^3\\&=p^2\cdot\left|2a+\frac{1}{2a}\right|^3\\&\geqslant 8p^2,\end{aligned}$$

等号当 $a=\pm\dfrac{1}{2}$ 时取得．因此所求面积的最小值为 $8p^3$．

例题 4

（★★★★）已知抛物线 $y^2=4x$ 的内接三角形 ABC 的重心恰好是抛物线的焦点，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值．



答案 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

解析 设 $A(a^2,2a)$，$B(b^2,2b)$，$C(c^2,2c)$，则

$$a^2+b^2+c^2=3,a+b+c=0,$$

于是

$$a+b=-c,ab=c^2-\frac{3}{2},|a-b|=\sqrt{6-3c^2},$$

从而

$$\begin{aligned}S&=\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\a&b&c\end{vmatrix}\\&=|a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2|\\&=\sqrt{6-3c^2}\cdot\left|3c^2-\frac{3}{2}\right|\\&=\sqrt{\frac{1}{2}(12-6c^2)\cdot\left(3c^2-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(3c^2-\frac{3}{2}\right)}\\&\leqslant\frac{3\sqrt{6}}{2},\end{aligned}$$

等号当 $c^2=\dfrac{3}{2}$ 时取得，因此 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$．

❏ 椭圆的焦半径公式 I

例题 5

(★★★) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 与 x 轴的交点为 A，在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F，则椭圆离心率的取值范围是________.

答案　$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

解析　设 $P(x_0,y_0)$，则根据椭圆的焦半径公式 I 有 $|PF|=|FA|$，即

$$a-ex_0=\frac{a^2}{c}-c,$$

解得

$$x_0=\frac{a^2}{c}+a-\frac{a^3}{c^2}.$$

又因为 $x_0\in[-a,a)$，所以有

$$-a\leqslant\frac{a^2}{c}+a-\frac{a^3}{c^2}<a,$$

两边同除以 a 可解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant e<1$.

例题 6

(★★★) 已知椭圆的长轴长为 6，离心率为 $\dfrac{1}{3}$，F_2 为椭圆的右焦点.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 点 M 在圆 $x^2+y^2=8$ 上，且 M 在第一象限，过 M 作圆 $x^2+y^2=8$ 的切线交椭圆于 P,Q 两点，判断 $\triangle PF_2Q$ 的周长是否为定值，并说明理由.

答案　(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$；

(2) $\triangle PF_2Q$ 的周长为定值 6.

解析　(1) 略

(2) 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$. 由题意，$x_1>0$，$x_2>0$.

因为

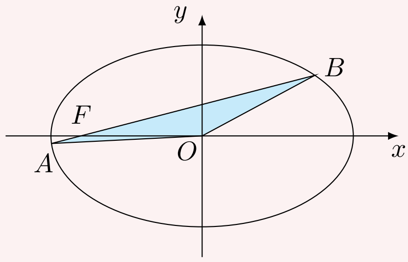
$$\begin{aligned}|PF_2|&=3-\frac{1}{3}x_1,\\|PM|&=\sqrt{|OP|^2-|OM|^2}=\frac{1}{3}x_1,\end{aligned}$$

所以 $|PF_2|+|PM|=3$. 同理可得 $|QF_2|+|QM|=3$. 因此 $\triangle PF_2Q$ 的周长为定值 6.

❑ 椭圆的焦半径公式 II

例题 7

(★★★) 已知点 F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左焦点，直线 AB 经过 F 且与椭圆交于 A,B 两点．若 O 为坐标原点，$\triangle AOB$ 的面积是 $\dfrac{9}{2}$，求直线 AB 的斜率 k．



答案　$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

解析　**解法一**　设 $AB:x=my-4$，则

$$\frac{1}{25}(my-4)^2+\frac{1}{9}y^2=1,$$

从而

$$\left(\frac{m^2}{25}+\frac{1}{9}\right)y^2-\frac{8m}{25}y-\frac{9}{25}=0,$$

从而

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{\dfrac{m^2}{25}+\dfrac{1}{9}}\cdot\sqrt{\left(\frac{8m}{25}\right)^2-4\left(\frac{m^2}{25}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(-\frac{9}{25}\right)}=\frac{9}{2},$$

整理得

$$81m^4-1150m^2-975=0,$$

于是

$$(m^2-15)(81m^2+65)=0,$$

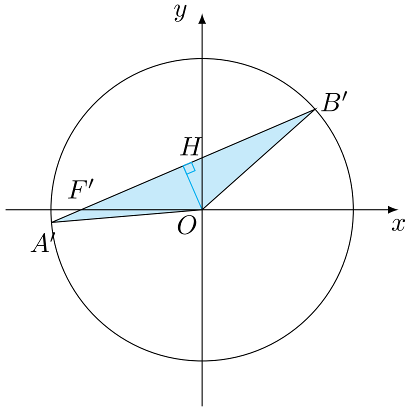
因此直线 AB 的斜率 $k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$．

解法二　利用仿射变换

$$x'=x,y'=\frac{5}{3}y,$$

将椭圆变成圆 $x'^2+y'^2=25$，则

$$S_{\triangle A'OB'}=\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{2}.$$



设 O 到直线 $A'B'$ 的距离为 OH ，则

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{25-OH^2}\cdot OH=\frac{15}{2},$$

即

$$OH^2(25-OH^2)=\frac{225}{4},$$

于是 $OH^2=\frac{5}{2}$ ，从而

$$\sin\angle B'F'O=\sqrt{\frac{5}{32}},$$

从而

$$\tan\angle B'F'O=\pm\sqrt{\frac{5}{27}},$$

因此所求直线的斜率 $k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$.

解法三 设 $\angle BFO=\theta$ ，则

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(\frac{9}{5-4\cos\theta}+\frac{9}{5+4\cos\theta}\right)\cdot\sin\theta=\frac{9}{2},$$

整理得

$$40\sin\theta=25-16\cos^2\theta,$$

即

$$(4\sin\theta-1)(4\sin\theta-9)=0,$$

因此 $\sin\theta=\frac{1}{4}$ ，从而直线 AB 的斜率 $k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$.

例题 8

(★★★) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$ ，右顶点为 A ，点 E 的坐标为 $(0,c)$ ，$\triangle EFA$ 的面积为 $\frac{b^2}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设点 Q 在线段 AE 上，$|FQ|=\frac{3}{2}c$ ，延长线段 FQ 与椭圆交于点 P ，点 M ，N 在 x 轴上，$PM\parallel QN$ ，且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c ，四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

(i) 求直线 FP 的斜率;

(ii) 求椭圆的方程.

答案　(1) $\dfrac{1}{2}$;

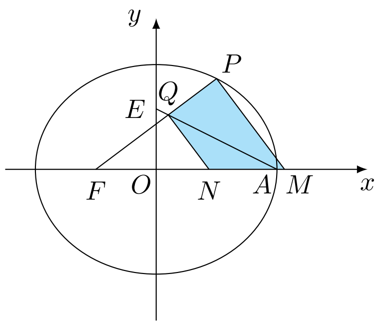
(2) (i) $\dfrac{3}{4}$; (ii) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

解析　(1) 根据题意，有

$$\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot c=\frac{1}{2}b^2,$$

从而 $a=2c$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

(2) 如图.



(i) 根据题意，有 $A(2c,0)$，$E(0,c)$，$FQ=\dfrac{3}{2}c$，设 $\angle QFA=\theta$，则由 E,Q,A 共线，可得

$$\frac{\frac{3}{2}c\sin\theta}{\frac{3}{2}c\cos\theta-3c}=\frac{c}{-2c},$$

解得 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，直线 FP 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$.

(ii) 由 (i) 可得 $Q\left(\dfrac{1}{5}c,\dfrac{9}{10}c\right)$. 根据焦半径公式 II，有

$$PF=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{3c^2}{2c-\frac{4}{5}c}=\frac{5}{2}c,$$

因此 $P\left(c,\dfrac{3}{2}c\right)$. 注意到 $PQ=c$，于是 PM,QN 均与 PF 垂直，进而四边形 $PQNM$ 的面积

$$\begin{aligned}S_{PQNM}&=S_{\triangle MPF}-S_{\triangle NQF}\\&=\frac{1}{2}FP^2\tan\theta-\frac{1}{2}FQ^2\tan\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left[\left(\frac{5}{2}c\right)^2-\left(\frac{3}{2}c\right)^2\right]\\&=\frac{3c^2}{2},\end{aligned}$$

从而 $c=2$，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

椭圆的焦点三角形面积公式

例题 9

(★★) 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P 与两焦点 F_1、F_2 形成的夹角 $\angle F_1PF_2=\alpha$，求三角形 F_1PF_2 的面积.

答案 $b^2\tan\dfrac{\alpha}{2}$

解析 对 $\triangle PF_1F_2$ 应用余弦定理，有

$$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\alpha,$$

即

$$|F_1F_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot(1+\cos\alpha),$$

于是可得

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\alpha}.$$

所以

$$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\alpha=b^2\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=b^2\cdot\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=b^2\tan\frac{\alpha}{2}.$$

椭圆的光学性质

例题 10

(★★★) F_1,F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点.

(1) 设 l 是该椭圆的一条切线，H_1,H_2 分别是 F_1,F_2 在 l 上的垂足，证明：$F_1H_1\cdot F_2H_2=b^2$.

(2) 设 l_1,l_2 是该椭圆过椭圆外的一点 P 的两条切线，切点分别为 T_1,T_2，证明：$\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$.

答案 (1) 略;

(2) 略.

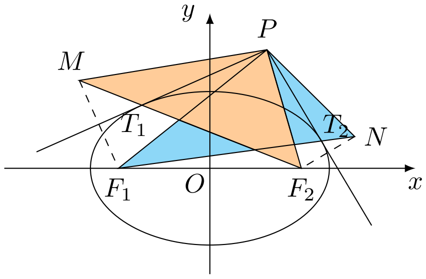
解析 解法一

(1) 设切点 $T(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$，$l$：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

$$\begin{aligned}F_1H_1\cdot F_2H_2&=\frac{\left|\frac{(-c)x_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}\cdot\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}\\&=\frac{1-\frac{c^2{x_0}^2}{a^4}}{\frac{{x_0}^2}{a^4}+\frac{{y_0}^2}{b^4}}=\frac{a^4-c^2{x_0}^2}{{x_0}^2+\frac{a^4{y_0}^2}{b^4}}\\&=b^2\cdot\frac{a^4-c^2{x_0}^2}{b^2{x_0}^2+a^4\cdot\frac{{y_0}^2}{b^2}}\\&=b^2\cdot\frac{a^4+\left(b^2-a^2\right){x_0}^2}{b^2{x_0}^2+a^4\left(1-\frac{{x_0}^2}{a^2}\right)}\\&=b^2.\end{aligned}$$

原命题得证.

(2) 如图，作 F_1 、 F_2 分别关于切线 PT_1, PT_2 对称的点 M, N ，则

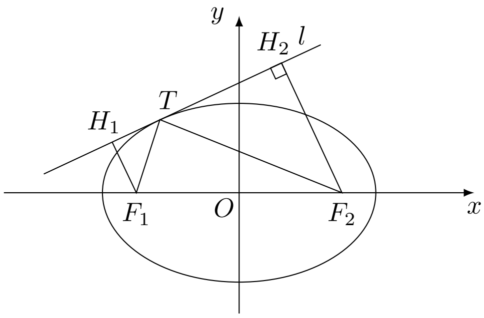


因为 $PM=PF_1$ ， $PF_2=PN$ ， $MF_2=F_1N\ =2a$ （椭圆的光学性质），所以 $\triangle PMF_2\cong\triangle PF_1N$.

于是 $\angle MPF_2=\angle F_1PN$, 从而 $\angle MPF_1=\angle F_2PN$, 也即 $2\angle F_1PT_1=2\angle F_2PT_2$, 因此 $\angle F_1PT_1=\angle F_2PT_2$, 原命题得证.

解法二

(1) 如图，连接 F_1T, F_2T .



设 $\angle F_1TF_2=\theta$ ， $F_1T=m$ ， $F_2T=n$ ，则

$$
\begin{aligned}
F_1H\cdot F_2H=&\sin^2\frac{\pi-\theta}{2}\cdot mn\\
=&\frac{1+\cos\theta}{2}\cdot mn\\
=&\frac{1+\frac{m^2+n^2-4c^2}{2mn}}{2}\cdot mn\\
=&\frac{(m+n)^2-4c^2}{4}=b^2.
\end{aligned}
$$

所以，原命题得证.

(2) 见解法一

例题 11

(★★★) 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ $a>b>0$ ）上两点 A,B 处的切线互相垂直，且相交于点 P ，求 P 点的轨迹.

答案 $x^2+y^2=a^2+b^2$

解析 解法一 设 $P(x_0,y_0)$ ，过 P 点的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$ 即 $kx-y-kx_0+y_0=0$ ，当 k 分别取 k_1 和 k_2 时，对应的切线分别为 PA 和 PB . 根据等效判别式，可得

$$
a^2k^2+b^2-(kx_0+y_0)^2=0,
$$

整理为关于 k 的二次方程

$$\left(a^2-x_0^2\right)k^2-2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0,$$

由 $k_1\cdot k_2=-1$，可得

$$a^2-x_0^2+b^2-y_0^2=0,$$

即

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2.$$

因此所求 P 点的轨迹是以椭圆的中心 O 圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆 $x^2+y^2=R^2$，其中 $R^2=a^2+b^2$．

解法二 设 $P(x_0,y_0)$，过 P 点的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$ 即 $kx-y-kx_0+y_0=0$，当 k 分别取 k_1 和 k_2 时，对应的切线分别为 PA 和 PB．根据等效判别式，可得

$$a^2k^2+b^2-\left(kx_0+y_0\right)^2=0,$$

整理为关于 k 的二次方程

$$\left(a^2-x_0^2\right)k^2-2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0,$$

由 $k_1\cdot k_2=-1$，可得

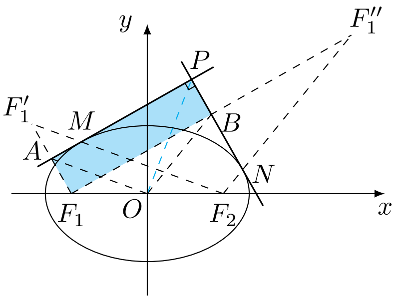
$$a^2-x_0^2+b^2-y_0^2=0,$$

即

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2.$$

因此所求 P 点的轨迹是以椭圆的中心 O 圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆 $x^2+y^2=R^2$，其中 $R^2=a^2+b^2$．

解法三 如图，设两个切点分别 M,N，作椭圆的左焦点 F_1 关于两条切线 PM,PN 的对称点，分别为 F_1',F_1''，连接 $F_1F_1',F_1F_1'',F_2F_1',F_2F_1''$，$A,B$ 分别为线段 F_1F_1',F_1F_1'' 的中点，连接 OA,OB,OP．



根据椭圆的光学性质，F_2,M,F_1' 以及 F_2,N,F_1'' 均三点共线，因此 $|OA|=|OB|=a$．由于四边形 $APBF_1$ 为矩形，因此 $|OP|^2+|OF_1|^2=|OA|^2+|OB|^2$，即 $|OP|^2=2a^2-c^2=a^2+b^2$，从而点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$．

备注 转化观察点，就得到一个等价的问题：

对于两条垂直直线和一个椭圆，已知椭圆无论如何滑动都与两条直线相切，求椭圆中心的轨迹.

❏ 椭圆的垂径定理

例题 12

(★★★) 已知椭圆 $C: 9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M.

(1) 证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

(2) 若 l 过点 $\left(\frac{m}{3},m\right)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

答案 (1) 定值为 -9；

(2) 能，l 的斜率为 $4\pm\sqrt{7}$.

解析 解法一

(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}9x_1^2+y_1^2=m^2,\\9x_2^2+y_2^2=m^2,\end{cases}$$

两式相减得

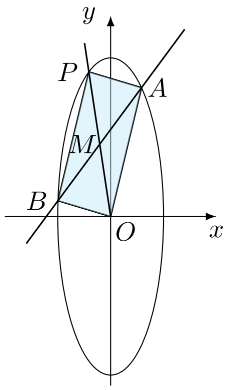
$$9(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0,$$

即

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-9.$$

事实上，等式左边即直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率之积．因此原命题得证，且定值为 -9.

(2) 根据题意，如图.



假设存在符合题意的平行四边形 $OAPB$，设 $M(x_0,y_0)$，则 $P(2x_0,2y_0)$，于是

$$9x_0^2+y_0^2=\frac{1}{4}m^2.$$

此时根据第 (1) 小题的结论，有

$$\frac{m-y_0}{\frac{m}{3}-x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-9,$$

整理得

$$3mx_0+my_0=9x_0^2+y_0^2=\frac{1}{4}m^2,$$

即

$$3x_0+y_0=\frac{1}{4}m.$$

由关于 x_0,y_0 的两个方程齐次化可得

$$\frac{9x_0^2+y_0^2}{(3x_0+y_0)^2}=4,$$

于是解得直线 l 的斜率为

$$-9\cdot\frac{x_0}{y_0}=4\pm\sqrt{7}.$$

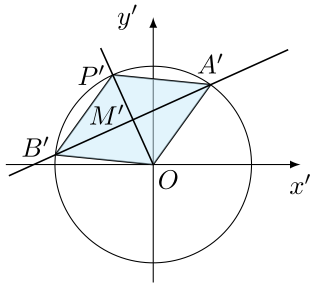
解法二

(1) 见解法一

(2) 在伸缩变换

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$$

下椭圆变成半径为 $m'=\dfrac{m}{3}$ 的圆 $x'^2+y'^2=m'^2$，所有直线的斜率变为原来的 $\dfrac{1}{3}$，如图.



在第 (1) 小题中由于变换后的直线 $O'M'$ 与直线 $A'B'$ 垂直，因此斜率的乘积为 -1，而 $k_{OM'}=\dfrac{1}{3}k_{OM}$，$k_{A'B'}=\dfrac{1}{3}k_{AB}$，所以变换前直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值 -9.

在第 (2) 小题中，欲使得 $OAPB$ 为平行四边形，只需要变换后的四边形 $O'A'P'B'$ 为菱形. 由于变换前的直线 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，故变换后的直线 l' 应该过点 $\left(\dfrac{m}{3},\dfrac{m}{3}\right)$，即 (m',m'). 设变换后的直线 $l':y'=k'(x'-m')+m'$，则只需要 O' 到直线 l' 的距离为圆的半径的一半即可，也即

$$\frac{|-k'm'+m'|}{\sqrt{1+k'^2}}=\frac{m'}{2},$$

即

$$3k'^2-8k'+3=0,$$

解得

$$k'=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3},$$

于是变换前的直线 l 的斜率为

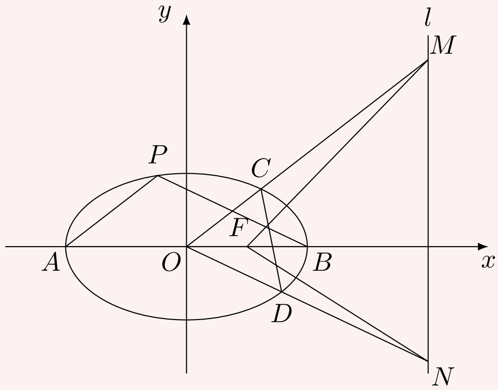
$$k=3k'=4\pm\sqrt{7}.$$

例题 13

(★★★) 如图，已知 P 为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上不同于长轴端点的动点，A,B 分别为椭圆 E 的左、右顶点，F 为椭圆的右焦点，l 为椭圆的右准线.

过点 O 作射线 $OM\parallel PA$，交 l 于点 M；作射线 $ON\parallel PB$，交 l 于点 N.

射线 OM,ON 与椭圆的交点分别为 C,D.



(1) 求证：$\angle OMF=\angle ONF$；

(2) 求证：$\triangle OCD$ 的面积为定值.

答案 (1) 略；

(2) 略.

解析 (1) 设 $M\left(\dfrac{a^2}{c},m\right)$，$N\left(\dfrac{a^2}{c},n\right)$，则射线 OM 与射线 ON 的斜率之积为定值 $-\dfrac{b^2}{a^2}$，从而可得

$$mn=-\frac{a^2b^2}{c^2},$$

因此可得 $FM\perp ON$ 且 $FN\perp OM$，因此 $\angle OMF$ 与 $\angle ONF$ 均为 $\angle MON$ 的余角，命题得证.

(2) 设 $C(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$，$D(a\cos\beta,b\sin\beta)$，则射线 OC 与射线 OD 的斜率之积为定值 $-\dfrac{b^2}{a^2}$，从而可得

$$\cos(\alpha-\beta)=0,$$

因此 $\triangle OCD$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}ab\left|\sin(\alpha-\beta)\right|=\frac{1}{2}ab$$

为定值.

椭圆上的四点共圆

例题 14

(★★★) 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点 F 作两条相互垂直的弦 AB,CD，证明：A,B,C,D 四点共圆当且仅当 $|AB|=|CD|$.

答案 略

解析 我们熟知引理：

已知二次曲线上四点 A,B,C,D ，若 AB,CD 斜率均存在，则 AB 与 CD 的斜率互为相反数与 A,B,C,D 四点共圆等价.

结合椭圆的对称性，原命题成立.

引理的证明：考虑非圆二次曲线 $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ （$A\neq B$）与两条相交直线 $(y-k_1x-b_1)\cdot(y-k_2x-b_2)=0$ （$k_1\neq k_2$）形成的交点曲线系

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F-\lambda\cdot(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)=0,$$

当且仅当 $k_1+k_2=0$ 时该方程表示圆，因此引理得证.

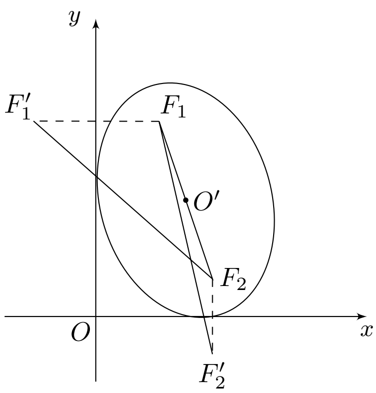
❏ 椭圆的蒙日圆

例题 15

（★★★）对于两条垂直直线和一个椭圆，已知椭圆无论如何滑动都与两条直线相切，求椭圆中心的轨迹.

答案　椭圆中心的轨迹是以两条垂直的直线交点为圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆

解析　如图，



由椭圆的几何性质，

$$\left|F_1{}'F_2\right|=\left|F_1F_2{}'\right|=2a.$$

设 $O'(x,y)$ ，则 $F_1(x-c\cos\theta,y+c\sin\theta)$ ，$F_2(x+c\cos\theta,y-c\sin\theta)$ ，$F_1{}'(-x+c\cos\theta,y+c\sin\theta)$ ，$F_2{}'(x+c\cos\theta,-y+c\sin\theta)$ ，

所以

$$\left|F_1F_2{}'\right|^2=4a^2=4c^2\cos^2\theta+4y^2,$$

$$\left|F_2F_1{}'\right|^2=4a^2=4c^2\sin^2\theta+4x^2,$$

两式相加，有

$$x^2+y^2=2a^2-c^2=a^2+b^2.$$

所以 P 点的轨迹是以两条垂直的直线交点为圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆.

备注　即蒙日圆.

课后习题

习题 1

(★★★) 若不等式组 $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0, \\ x+2y-2\geqslant 0, \\ x-y+2m\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为三角形，且其面积等于 $\dfrac{4}{3}$，则 m 的值为（　　）

A. -3

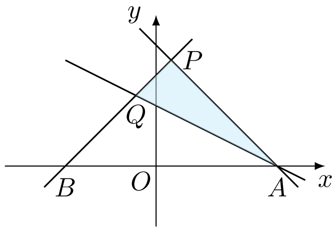
B. 1

C. $\dfrac{4}{3}$

D. 3

答案　B

解析　如图，画出不等式组表示的平面区域，直线 $x+y-2=0$ 和直线 $x+2y-2=0$ 均交 x 轴于 $A(2,0)$，直线 $x-y+2m=0$ 与直线 $x+y-2=0$、直线 $x+2y-2=0$ 和 x 轴分别交于点 P、Q 和 B .



根据题意，当 B 点位于 A 点左侧，即 $-2m<2$ 时，不等式组表示三角形区域（$\triangle APQ$ 的边界以及内部），此时区域面积为

$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle PBA}-S_{\triangle QBA}=\frac{1}{2}\cdot(x_A-x_B)\cdot(y_P-y_Q),$$

经计算可得

$$x_B=-2m, y_P=m+1, y_Q=\frac{2}{3}(m+1),$$

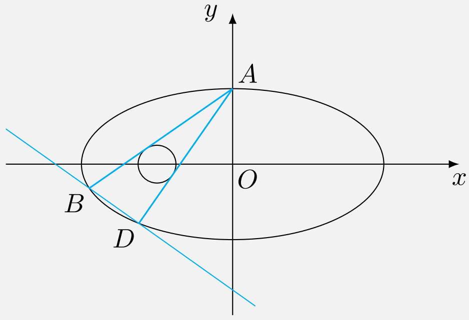
因此

$$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\cdot(2+2m)\cdot\frac{1}{3}(m+1)=\frac{4}{3},$$

解得 $m=-3$（舍去），或 $m=1$.

习题 2

(★★★) 如图，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上顶点为 A，过点 A 作圆 $M:(x+1)^2+y^2=r^2$（$0<r<1$）的两条切线分别与椭圆 C 相交于点 B,D（不同于点 A）. 当 r 变化时，试问直线 BD 是否过某个定点？若是，求出该定点；若不是，请说明理由.



答案　过定点，定点为 $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$

解析　设 $AB: y=kx+1$ ，则有

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=r,$$

于是

$$\left(1-r^2\right)k^2-2k+1-r^2=0,$$

于是可得直线 AD 的斜率为 $\dfrac{1}{k}$. 联立直线 AB 与椭圆的方程，可得

$$\left(4k^2+1\right)x^2+8kx=0,$$

于是可得

$$B\left(\frac{-8k}{4k^2+1},\frac{-4k^2+1}{4k^2+1}\right),D\left(\frac{-8k}{4k^2+1},\frac{-4+k^2}{4+k^2}\right).$$

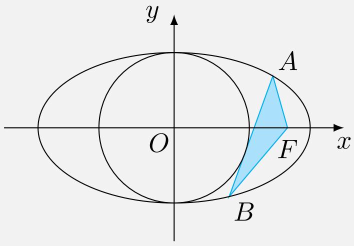
考虑到当 $r\to 1$ 时，C 趋于椭圆的下顶点，B 趋于椭圆的上顶点，因此猜想定点若存在，则必然在 y 轴上，因此计算直线 BD 的纵截距，为

$$\frac{\dfrac{-4k^2+1}{4k^2+1}\cdot\left(\dfrac{-8k}{4+k^2}\right)+\dfrac{8k}{4k^2+1}\cdot\dfrac{-4+k^2}{4+k^2}}{\dfrac{-8k}{4+k^2}+\dfrac{8k}{4k^2+1}}=-\frac{5}{3},$$

因此直线 BD 过定点 $\left(0,-\dfrac{5}{3}\right)$.

习题 3

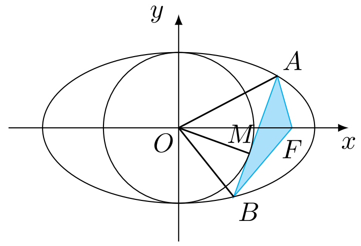
(★★★) 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$），圆 O 以椭圆 E 的短轴为直径．设 AB 是椭圆 E 的弦且与圆 O 相切，椭圆的一个焦点 F 与弦 AB 在 y 轴同侧，求证：$\triangle FAB$ 的周长为定值 $2a$.



答案　定值为 $2a$

解析 解法一 设切点为 M ，我们可以证明一个更强的结论：

$$FA + AM = FB + BM = a.$$



连接 OA, OB, OM . 设 $A(x_1, y_1)$ ，则

$$\begin{aligned} FA + AM &= a - \frac{c}{a}\cdot x_1 + \sqrt{OA^2 - OM^2} \\ &= a - \frac{c}{a}\cdot x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - b^2} \\ &= a - \frac{c}{a}\cdot x_1 + \sqrt{x_1^2 + b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) - b^2} \\ &= a, \end{aligned}$$

类似地，有

$$FB + BM = a,$$

因此原命题得证.

解法二 当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$ ，不妨设 $k > 0$ ， $m < 0$. 由 AB 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切可得

$$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = b,$$

即

$$m = -b\sqrt{1+k^2}.$$

联立直线 AB 与椭圆 E 的方程，可得

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0,$$

将 m 代入，可得

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 - 2a^2kb\sqrt{1+k^2}x + a^2b^2k^2 = 0,$$

设 A, B 的横坐标分别为 x_1, x_2 则

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2kb\sqrt{1+k^2}}{b^2 + a^2k^2},$$

且

$$|x_1 - x_2| = \frac{2abck}{b^2 + a^2k^2},$$

其中 c 为椭圆的半焦距.

因此 $\triangle FAB$ 的周长为

$$FA+FB+AB=2a-\frac{c}{a}\cdot(x_1+x_2)+\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=2a.$$

容易验证，当直线 AB 的斜率不存在时，命题依然成立．因此原命题得证．

习题 4

(★★）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上.

(1）求 C 的方程；

(2）直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M．证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

答案　（*1*）$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

（*2*）定值为 $-\dfrac{1}{2}$．

解析　（*1*）由椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得椭圆方程为

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

再由点 $(2,\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上可解得椭圆方程为

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

（*2*）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{4}=1,\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{4}=1,$$

两式相减得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{8}+\frac{y_1^2-y_2^2}{4}=0,$$

整理得

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2},$$

即直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值 $-\dfrac{1}{2}$．

备注　也可以利用仿射变换解决．