2017 年清华大学能力测试题（回忆版）

兰琦

2017 年 4 月 19 日

说明：考试时间为 **90** 分钟，原卷 40 道题均为不定项选择题．这里收录的是回忆版试题，故部分选择题选项为空白．

1. 在圆周的十等分点 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 中取出四个点，可以围成的梯形的个数为（　　）

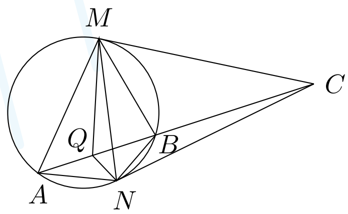
A. 60　　B. 40　　C. 30　　D. 10

解析　A．

按梯形互相平行的对边的端点角标奇偶性是否相同分类，底边可能为 $A_1A_{10}, A_2A_9, A_3A_8, A_4A_7, A_5, A_6$ 中的两条，也可能为 $A_2A_{10}, A_3A_9, A_4A_8, A_5A_7$ 中的两条，减去构成平行四边形的情况，得到不同的梯形个数为

$$(\mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_4^2 - 4) \times 5 = 60.$$

2. 过圆 O 外一点 C 作圆 O 的两条切线，切点分别为 M, N，过点 C 作圆 O 的割线交圆 O 于 B, A 两点，点 Q 满足 $\angle AMQ = \angle CNB$，则下列结论正确的是（　　）



A. $\triangle AMQ$ 与 $\triangle MBC$ 相似　　B. $\triangle AQM$ 与 $\triangle NBM$ 相似

C. $\triangle AMN$ 与 $\triangle BQM$ 相似　　D. $\triangle AMN$ 与 $\triangle BNQ$ 相似

解析　BC．

根据弦切角定理和圆周角定理，有

$$\angle CMB = \angle MAB = \angle MNB, \angle CNB = \angle BMN = \angle BAN.$$

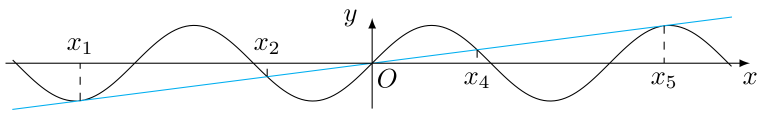
3. 已知方程 $kx = \sin x$ 在区间 $(-3\pi, 3\pi)$ 内有 5 个实数解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$，则（　　）

A. $x_5 = \tan x_5$　　B. $\dfrac{29\pi}{12} < x_5 < \dfrac{5\pi}{2}$

C. x_2, x_4, x_5 成等差数列　　D. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

解析　ABD.

如图.



选项 A，直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\sin x$ 在 $x=x_5$ 时相切，于是有

$$\begin{cases} kx_5=\sin x_5, \\ k=\cos x_5, \end{cases}$$

从而可得 $x_5=\tan x_5$.

选项 B，考虑直线 $y=x$ 与曲线 $y=\tan x$ 在区间 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 内的公共点，由于

$$\tan\frac{29\pi}{12}=\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}<\frac{29\pi}{12},$$

于是 $x_5\in\left(\dfrac{29\pi}{12},\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

选项 C，若 x_2,x_4,x_5 构成等差数列，则 $x_5=3x_4$ ，接下来证明方程组

$$\begin{cases} kx=\sin x, \\ k\cdot 3x=\sin 3x, \end{cases}$$

无非零实数解．事实上，第二个方程即

$$3kx=3\sin x-4\sin^3 x,$$

将第一个方程代入即得．于是选项 C 错误.

选项 D，根据对称性，该选项正确.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant a, \\ 4x^3-3x, & x<a, \end{cases}$ 则（　　）

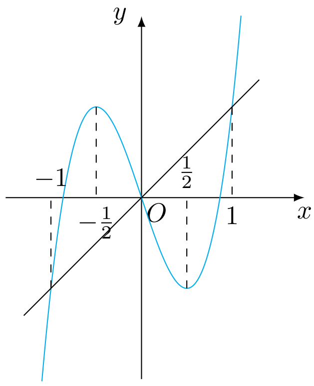
A. 若 $f(x)$ 有两个极值点，则 $a=0$ 或 $\dfrac{1}{2}<a<1$

B. 若 $f(x)$ 有极小值点，则 $a>\dfrac{1}{2}$

C. 若 $f(x)$ 有极大值点，则 $a>-\dfrac{1}{2}$

D. 使 $f(x)$ 连续的 a 有 3 个取值

解析　CD.



对于选项 A，若 $f(x)$ 有两个极值点，则 $a=0$ 或 $a>\dfrac{1}{2}$，所以选项 A 错误；

对于选项 B，当 $a=0$ 时，$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，所以选项 B 错误；

对于选项 C，正确；

对于选项 D，使 $f(x)$ 连续的 a 有 3 个取值：$-1,0,1$，所以选项 D 正确.

5. 空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，满足 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$ 的点 (x,y,z) 围成的体积是（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{12}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

解析　B.

考虑到满足 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 的点 (x,y,z) 所围成的体积为 1，再根据对称性，可得满足题意的点的体积为该体积的 $\dfrac{1}{6}$.

6. 圆 O 的半径为 3，一条弦 $AB=4$，P 为圆 O 上任意一点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

解析　D.

考虑 $\overrightarrow{BP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上投影的数量即可.

7. 集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，从中取出三个元素构成集合 A 的子集，且所取得的三个数互不相邻，这样的子集个数为（　　）

A. 56　　B. 64　　C. 72　　D. 80

解析　A.

从集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 中选出三个数 $a,b,c\,(a<b<c)$，则 $a,b+1,c+2$ 即符合题意，因此 $\mathrm{C}_8^3=56$ 为所求.

8. 已知 z 是实部虚部均为正整数的复数，则（　　）

A. $\mathrm{Re}(z^2-z)$ 被 2 整除　　B. $\mathrm{Re}(z^3-z)$ 被 3 整除

C. $\mathrm{Re}(z^4-z)$ 被 4 整除　　D. $\mathrm{Re}(z^5-z)$ 被 5 整除

解析　BD.

令 $z=a+b\mathrm{i}$，则对于选项 A，有

$$\mathrm{Re}(z^2-z)=a^2-b^2-a=a(a-1)-b^2,$$

于是当 b 为奇数时，$2\nmid \mathrm{Re}(z^2-z)$，选项 A 错误；

对于选项 B，有

$$\mathrm{Re}(z^3-z)=a^3-3ab^2-a=(a-1)\cdot a\cdot(a+1)-3ab^2,$$

于是 $3\mid \mathrm{Re}(z^3-z)$，选项 B 正确；

对于选项 C，有

$$\mathrm{Re}(z^4-z)=a^4-6a^2b^2+b^4-a,$$

取 $4\mid a$，b 为奇数，则必然有 $4\nmid \mathrm{Re}(z^4-z)$，选项 C 错误；

对于选项 C，有

$$\mathrm{Re}(z^5-z)=a^5-10a^3b^2+5ab^4-a,$$

根据费马小定理，有 $a\equiv a^5 \pmod 5$，$5\mid \mathrm{Re}(z^5-z)$，选项 D 正确.

9. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，直线 $l_1:y=-\dfrac{1}{2}x$，直线 $l_2:y=\dfrac{1}{2}x$，P 为椭圆上任意一点，过点 P 作 $PM\parallel l_1$ 且与直线 l_2 交于点 M，作 $PN\parallel l_2$ 且与直线 l_1 交于点 N，若 $|PM|^2+|PN|^2$ 为定值，则 (　　)

A. $ab=2$　　B. $ab=3$　　C. $\dfrac{a}{b}=2$　　D. $\dfrac{a}{b}=3$

解析　C.

设 $M(2m,m)$，$B(2n,-n)$，则 $P(2(m+n),m-n)$，根据题意，$|PM|^2+|PN|^2$ 为定值，因此

$$|OM|^2+|ON|^2=|PM|^2+|PN|^2=5(m^2+n^2)$$

为定值. 另一方面，有

$$\frac{4(m+n)^2}{a^2}+\frac{(m-n)^2}{b^2}=1,$$

即

$$\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(m^2+n^2)+\left(\frac{8}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right)mn=1,$$

从而可得 $a=2b$.

10. 已知 z_1,z_2 为实部虚部都为正整数的复数，则 $\dfrac{|z_1+z_2|}{\sqrt{|z_1\cdot z_2|}}$ (　　)

A. 有最大值 2　　B. 无最大值　　C. 有最小值 $\sqrt{2}$　　D. 无最小值

解析　BD.

设 z_1,z_2,z_1+z_2 对应的点分别为 A,B,C，则

$$\frac{|z_1+z_2|}{\sqrt{|z_1\cdot z_2|}}=\sqrt{\frac{OC^2}{OA\cdot OB}}=\sqrt{\frac{OA^2+OB^2+2OA\cdot OB\cdot\cos\theta}{OA\cdot OB}}=\sqrt{\frac{OA}{OB}+\frac{OB}{OA}+2\cos\theta}.$$

令 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=n+n\mathrm{i}$，当 $n\to+\infty$ 时，原式的值趋于无穷大；令 $z_1=n+\mathrm{i}$，$z_2=1+n\mathrm{i}$，当 $n\to+\infty$ 时，原式的值趋于 $\sqrt{2}$，且原式的值必然大于 $\sqrt{2}$，于是原式既没有最大值也没有最小值.

11. 已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$，则 (　　)

A. $f(x)$ 有对称轴　　B. $f(x)$ 有对称中心

C. $f(x)=a$ 在 $(0,2\pi)$ 上的解为偶数个　　D. $f(x)=\frac{7}{9}$ 有解

解析　AB.

对于选项 A，$x=0$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴；

对于选项 B，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心；

对于选项 C，当 $a=0$ 时，$f(x)=a$ 在 $(0,2\pi)$ 上的解为 $x=\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$，共 3 个；

对于选项 D，考虑到

$$\sin x\cdot\sin 2x=2\sin^2 x\cos x=2\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2 x(1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}<\frac{7}{9},$$

于是 $f(x)$ 的最大值小于 $\frac{7}{9}$，方程 $f(x)=\frac{7}{9}$ 无解.

12. 已知实数 x,y 满足 $5x^2-y^2-4xy=5$，则 $2x^2+y^2$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. 2

解析　A.

考虑到

$$5+\lambda(2x^2+y^2)=(5+2\lambda)x^2-4xy+(\lambda-1)y^2,$$

令右侧的判别式

$$\Delta=16-4(5+2\lambda)(\lambda-1)=0,$$

解得 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=\frac{3}{2}$. 于是有

$$5-3(2x^2+y^2)=-(x+2y)^2\leqslant 0,$$

进而可得 $2x^2+y^2\geqslant\frac{5}{3}$，且等号当 $x=-2y$ 时取得. 因此 $2x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{5}{3}$.

13. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $\begin{cases}b\cos C+(a+c)(b\sin C-1)=0,\\ a+c=\sqrt{3},\end{cases}$ 则 $\triangle ABC$（　　）

A. 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$　　B. 周长的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $B=\frac{\pi}{3}$　　D. $B=\frac{\pi}{4}$

解析　AC.

根据题意，有

$$b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-(a+c)=0,$$

应用正弦定理，有

$$\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0,$$

即

$$\sin C\cdot\left[2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)-1\right]=0,$$

于是 $B=\frac{\pi}{3}$，选项 C 正确，选项 D 错误；

由于

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)^2,$$

进而可得当 $a=c$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ，选项 A 正确；

根据余弦定理，有

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac\geqslant 3-3\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

于是 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，选项 B 错误.

14. 两个半径为 1 的球的球心之间的距离为 d ，包含两个球的最小的球的体积为 V ，则 $\lim\limits_{d\to+\infty}\frac{V}{d^3}=($ $)$

A. $\frac{4\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{12}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

解析 B.

包含两个球的最小的球的半径为 $\frac{d}{2}+1$ ，于是

$$\lim_{d\to+\infty}\frac{V}{d^3}=\frac{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}+1\right)^3}{d^3}=\frac{\pi}{6}.$$

15. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 与过原点且互相垂直的两条直线的四个交点围成的菱形的面积可以是 ( )

A. 16 B. 12 C. 10 D. 18

解析 B.

设四个交点的坐标分别为 $(r_1\cos\theta,r_1\sin\theta),(-r_1\cos\theta,-r_1\sin\theta),(-r_2\sin\theta,r_2\cos\theta),(r_2\sin\theta,-r_2\cos\theta)$ ，则

$$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1,\frac{(r_2\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_2\cos\theta)^2}{b^2}=1,$$

于是

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36},$$

从而菱形的面积 $2r_1r_2$ 的取值范围为 $\left[\frac{144}{13},12\right]$.

16. （选项不全）已知 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$ 是 $1,2,3,4,5,6,7,8$ 的一个排列，满足 $a_1+a_3+a_5+a_7=a_2+a_4+a_6+a_8$ 的排列的个数为 ( )

A. 4608 B. C. D.

解析 A.

其中包含 1 的一组数必然为

$$(1,2,7,8),(1,3,6,8),(1,4,6,7),(1,4,5,8)$$

中的一组，因此所有符合题意的排列数为

$$4\cdot 2\cdot \mathrm{A}_4^4\cdot \mathrm{A}_4^4=4608.$$

17. 甲乙丙丁四个人背后有 4 个号码，赵同学说：甲是 2 号，乙是 3 号；钱同学说：丙是 2 号，乙是 4 号；孙同学说：丁是 2 号，丙是 3 号；李同学说：丁是 1 号，乙是 3 号．他们每人都说对了一半，则丙是几号 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析　C.

甲是 2 号，乙是 4 号，丙是 3 号，丁是 1 号．

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin^3 x+2\cos^3 x}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$ ，若 $n\in\mathbb{N}^*$ ，则 $\displaystyle\int_0^{2n\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值 (　　)

A. 与 n 有关　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解析　B.

考虑到 $f(x+\pi)=-f(x)$.

19. 函数 $f(x)=\left[\dfrac{2}{x}\right]-2\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 的值域 (　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

解析　B.

问题即函数 $g(x)=[2x]-2[x]$ ，$x\neq 0$ 的值域．考虑到函数 $g(x)$ 是周期为 1 的函数，因此只需考虑在 $x\in(0,1]$ 上的值域．事实上，我们有

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,0.5),\\ 1, & x\in[0.5,1),\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

于是所求的值域为 $\{0,1\}$.

20. 已知正整数 m,n 满足 $m\mid 2016$ ，$n\mid 2016$ ，$mn\nmid 2016$ ，则 (m,n) 的个数为 (　　)

A. 916　　B. 917　　C. 918　　D. 919

解析　C.

由于 $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ ，设 $m=2^{x_1}\cdot 3^{y_1}\cdot 7^{z_1}$ ，$n=2^{x_2}\cdot 3^{y_2}\cdot 7^{z_2}$ ，其中 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 均为整数，且 $0\leqslant x_1,x_2\leqslant 5$ ，$0\leqslant y_1,y_2\leqslant 2$ ，$0\leqslant z_1,z_2\leqslant 1$ ．根据题意，有 $x_1+x_2\geqslant 6$ 或 $y_1+y_2\geqslant 3$ 或 $z_1+z_2\geqslant 2$ ．考虑问题的反面，(m,n) 的个数为

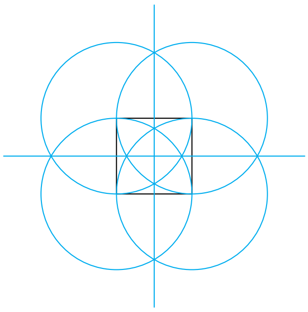
$$[(5+1)(2+1)(1+1)]^2-21\cdot 6\cdot 3=918.$$

21. 正方形 $ABCD$ 所在的平面内有一点 O ，使得 $\triangle OAB,\triangle OBC,\triangle OCD,\triangle ODA$ 为等腰三角形，则 O 点的不同位置有 (　　)

A. 1　　B. 5　　C. 9　　D. 13

解析　C.

如图，可能的点必然至少为两条轨迹的公共点，逐一考察即可.



22. 已知所有元素均为非负实数的集合 A 满足 $\forall a_i,a_j\in A$，$a_i\geqslant a_j$，均有 $a_i+a_j\in A$ 或 $a_i-a_j\in A$，且 A 中的任意三个元素的排列都不构成等差数列，则集合 A 中的元素个数可能为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析　B.

显然 $0\in A$.

对于选项 A，设 $A=\{0,a_1,a_2\}$，则 $a_2-a_1=a_1$，于是 $0,a_1,a_2$ 成等差数列，不符合题意，因此选项 A 错误;

对于选项 B，取 $A=\{0,1,3,4\}$ 即可，因此选项 B 正确;

对于选项 C，设 $A=\{0,a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，于是由

$$0<a_4-a_3<a_4-a_2<a_4-a_1$$

可得

$$a_4-a_3=a_1,a_4-a_2=a_2,a_4-a_1=a_3,$$

于是 $0,a_2,a_4$ 成等差数列，不符合题意，因此选项 C 错误;

对于选项 D，设 $A=\{0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，与选项 C 的处理方式类似，可得

$$a_1+a_4=a_2+a_3=a_5.$$

考虑到 $a_3+a_4>a_5$，且 a_2,a_3,a_4 不构成等差数列，于是 $a_4-a_3=a_1$，这样就有 $a_2=2a_1$，即 $0,a_1,a_2$ 构成等差数列，不符合题意，因此选项 D 错误.

23. 已知关于 z 的方程 $z^{2017}-1=0$ 的所有复数解为 $z_i\,(i=1,2,\cdots,2017)$，则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{2017}\frac{1}{2-z_i}$（　　）

A. 是比 $\dfrac{2017}{2}$ 大的实数　　B. 是比 $\dfrac{2017}{2}$ 小的实数　　C. 是有理数　　D. 不是有理数

解析　AC.

令 $x=\dfrac{1}{2-z}$，则 $z=2-\dfrac{1}{x}$，于是由 $z^{2017}=1$ 可得

$$(2x-1)^{2017}-x^{2017}=0,$$

即

$$(2^{2017}-1)x^{2017}-2017\cdot 2^{2016}\cdot x^{2016}+\cdots-1=0,$$

于是

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2017}=\frac{2017\cdot 2^{2016}}{2^{2017}-1}>\frac{2017}{2}.$$

24. 已知复数 x,y 满足 $x+y=x^4+y^4=1$ ，则 xy 的不同取值有（　　）种.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

解析　C.

设 $xy=m$ ，则

$$\begin{aligned}1&=x^4+y^4\\&=(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2\\&=(x+y)^4-4xy[(x+y)^2-2xy]-6x^2y^2\\&=1-4m(1-2m)-6m^2\\&=2m^2-4m+1,\end{aligned}$$

于是 $m=2$ 或 $m=0$.

25. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(m+1,n+1)=f(m,n)+f(m+1,n)+n$ ， $f(m,1)=1$ ， $f(1,n)=n$ ，其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$ ，则（　　）

A. 使 $f(2,n)\geqslant 100$ 的 n 的最小值是 11　　B. 使 $f(2,n)\geqslant 100$ 的 n 的最小值为 13

C. 使 $f(3,n)\geqslant 2016$ 的 n 的最小值是 19　　D. 使 $f(3,n)\geqslant 2016$ 的 n 的最小值是 20

解析　AC.

根据题意，有

$$\begin{aligned}&f(1,n):1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\cdots,\\&f(2,n):1,3,7,13,21,31,43,57,73,91,111,\cdots,\\&f(3,n):1,3,8,18,35,61,98,148,\cdots,\end{aligned}$$

设 $a_n=f(2,n)$ ， $b_n=f(3,n)$ ，则有递推公式

$$a_n=2n+a_{n-1},b_n=n+a_n+b_{n-1},$$

于是可得

$$a_n=n^2-n+1,b_n=n+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1),$$

因此使得 $a_n\geqslant 100$ 的 n 的最小值为 11；使得 $b_n\geqslant 2016$ 的 n 的最小值为 19 .

26. 已知 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上连续的有界函数， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 $g(x)=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant x}f(n)$ ，以下结论正确的有（　　）

A. $g(x)$ 是有界函数　　B. $g(x)$ 是连续函数

C. $g(x)$ 是单调递增函数　　D. $g(x)$ 不是单调递减函数

解析　ABD.

27. （选项不全）已知对任意实数 x，均有 $a\cos x+b\cos 3x\leqslant 1$，下列说法正确的是（　　）

A. $|a-2b|\leqslant 2$　　B. $|a+b|\leqslant 1$

C. $|a-b|\leqslant \sqrt{2}$　　D.

解析　ABC.

根据题意，有

$$\forall m\in[-1,1], ma+(4m^3-3m)b\leqslant 1.$$

分别令 $m=\pm\dfrac{1}{2}$，可得

$$\frac{1}{2}(a-2b)\leqslant 1,-\frac{1}{2}(a-2b)\leqslant 1,$$

从而选项 A 成立；

分别令 $m=\pm 1$，可得

$$a+b\leqslant 1,-(a+b)\leqslant 1,$$

从而选项 B 成立；

分别令 $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)\leqslant 1,-\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)\leqslant 1,$$

从而选项 C 成立；

28. 5 人中每两个人之间比一场，若第 i 个人胜 x_i（$i=1,2,3,4,5$）场，负 y_i 场（$i=1,2,3,4,5$）场，则（
）

A. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ 为定值　　B. $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$ 为定值

C. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 为定值　　D. $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2$ 为定值

解析　AB.

根据题意，有

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5,$$

且有

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2,$$

但

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)=20$$

为定值，而

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)+(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2)$$

不为定值．例如可以取 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(2,2,2,2,2),(4,3,2,1,0)$，则平方和分别为 20 和 30，不为定值．

注　最后的构造中，前者为 5 阶有向完全图中所有箭头都为逆时针方向；后者为 5 阶有向完全图中 5

个顶点编号分别为 $1,2,3,4,5$ ，其中所有方向均从较小数指向较大数.

29. 若存在满足下列三个条件的集合 A,B,C ，则称偶数 n 为"萌数":

(1) 集合 A,B,C 为集合 $M=\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ 的 3 个非空子集，A,B,C 两两之间的交集为空集，且 $A\cup B\cup C=M$;

(2) 集合 A 中的所有数均为奇数，集合 B 中的所有数均为偶数，所有的 3 的倍数都在集合 C 中;

(3) 集合 A,B,C 所有元素的和分别为 S_1,S_2,S_3 ，且 $S_1=S_2=S_3$.

下列说法正确的是 (　　)

A. 8 是"萌数"　　B. 60 是"萌数"　　C. 68 是"萌数"　　D. 80 是"萌数"

解析　ACD.

集合 M 中所有元素的和为

$$S_M=\frac{n^2+n}{2},$$

考虑到 $3\mid S_M$ ，于是 $n=6k,6k+2$ ，其中 $k\in\mathbb{N}^*$.

当 $n=6k$ 时，集合 M 中所有 3 的倍数之和大于 $\frac{1}{3}S_M$ ，于是集合 C 中的所有元素之和大于 $\frac{1}{3}S_M$ ，不符合题意. 接下来考虑 $n=6k+2$ 的情形.

当 $n=6k+2$ 时，$S_M=18k^2+15k+3$. 现将集合 M 中 3 的倍数挑选出来作为集合 C_0 ，然后将剩下的奇数构成集合 A_0 ，剩下的偶数构成集合 B_0 . 由于集合 M 中的奇数之和 x_1 和偶数之和 y_1 满足

$$\begin{cases}x_1+y_1=18k^2+15k+3,\\ y_1-x_1=3k+1,\end{cases}$$

于是 $x_1=9k^2+6k+1$ ，$y_1=9k^2+9k+2$. 类似可求得集合 C_0 中奇数之和 $x_2=3k^2$ ，偶数之和 $y_2=3k^2+3k$. 这样就有集合 A_0,B_0,C_0 的元素之和分别为

$$S_{A_0}=x_1-x_2=6k^2+6k+1,$$
$$S_{B_0}=y_1-y_2=6k^2+6k+2,$$

接下来只要从集合 A_0 中选出若干个和为 k 的元素，从集合 B_0 中选出若干个和为 $k+1$ 的元素，把这些元素放入集合 C_0 中就得到了符合题意的集合 A,B,C . 从而可得 k 是奇数.

综上所述，$n=12m-4$ ，其中 $m\in\mathbb{N}^*$ 为 n 为"萌数"的必要条件. 不难验证选项 A，C，D 均符合题意.

注　解答中得到的必要条件并不是充分的，比如当 $m=2$ 时，20 并不是"萌数".

30. 已知非零实数 a,b,c,A,B,C ，则" $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 与 $Ax^2+Bx+C\geqslant 0$ 的解集相同"是" $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$ "的 (　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　D.

不充分的例子: $(a,b,c)=(1,1,2)$ ，$(A,B,C)=(1,1,3)$;

不必要的例子: $(a,b,c)=(1,1,-1)$ ，$(A,B,C)=(-1,-1,1)$.

31. (选项不全)一个人投篮命中率为 $\frac{2}{3}$ ，连续投篮直到投进 2 个球时停止，则他投篮次数为 4 的概率是 (　　)

A. $\frac{4}{27}$　　B.　　C.　　D.

解析　A.

所求概率为

$$\mathrm{C}_3^2\left(\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}.$$

32. 已知 $0<P(A)<1$ ，$0<P(B)<1$ ，且 $P(A|B)=1$ ，则 (　　)

A. $P(\overline{A}|\overline{B})=0$　　B. $P(\overline{B}|\overline{A})=1$　　C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(\overline{B}|A)=1$

解析　BC.

即集合 B 为集合 A 的子集.

33. (选项不全)已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}(x-1)(y^2+6)=x(y^2+1),\\(y-1)(x^2+6)=y(x^2+1),\end{cases}$ 则 (　　)

A. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$　　B. $x=y$

C. 有 4 组解 (x,y)　　D.

解析　AB.

原方程组即

$$\begin{cases}y^2-5x+6=0,\\x^2-5y+6=0,\end{cases}$$

两式相加即得选项 A 正确；两式相减可得

$$(x-y)(x+y+5)=0,$$

而直线 $x+y+5=0$ 与圆 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 相离，当 $x=y$ 时，可以解得 $(x,y)=(2,2),(3,3)$ ，因此选项 B 正确，选项 C 错误；

34. (选项不全)在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2A=\sin^2B+\sin B\sin C$ ，则 (　　)

A. $A<\frac{\pi}{3}$　　B. $B<\frac{\pi}{3}$　　C.　　D.

解析　B.

根据题意，有

$$\sin B\sin C=\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B)\cdot\sin(A-B),$$

于是 $A=2B$ ，从而选项 B 正确.

35. 已知 $Q(x)=a_{2017}x^{2017}+a_{2016}x^{2016}+\cdots+a_1x+a_0$ ，对任意 $x\in\mathbb{R}^+$ 均有 $Q(x)>0$ 成立．若 $a_i\in\{-1,1\}$ ($i=0,1,2,\cdots2017$)，则 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{2017}$ 中取值为 -1 的项数最多为 (　　)

A. 1006　　B. 1007　　C. 1008　　D. 1009

解析　C.

令 $x=1$，可得 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{2017}$ 中取值为 -1 的项数不超过 1008；可以构造项数为 1008 的例子:

$$Q(x)=x^{2017}-x^{2016}+x^{2015}-x^{2014}+\cdots+x^3-x^2+x+1.$$