2015 年清华大学金秋营基础部分

兰琦

2017 年 3 月 1 日

1. 已知函数 $f(x)=4\sin^3 x\cos x-2\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 4x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及最大值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

解析 (1) 因为 $f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$,最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}\right],k\in\mathbb{Z}$. 单调递减区间为 $\left[\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{9\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}\right],k\in\mathbb{Z}$.

2. 设函数 $f(x)=\left(2x^2-4ax\right)\ln x+x^2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $f(x)>0$ 对 $x\geqslant 1$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解析 (1) $f'(x)=4(x-a)(1+\ln x)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增;

当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(a,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减;

当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增,在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},a\right)$ 上单调递减.

(2) 由 (1) 可知,当 $a\leqslant 1$ 时,$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,故只需满足 $f(1)>0$ 即可,而此时 $f(1)=1>0$ 恒成立,所以 $a\leqslant 1$ 满足题意.

当 $a>1$ 时,只需满足

$$f(a)=a^2(1-2\ln a)>0,$$

即可,解得

$$1<a<\sqrt{\mathrm{e}}.$$

综上所述,若不等式 $f(x)>0$ 对 $\forall x\in[1,+\infty)$ 恒成立,则 a 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}})$.

3. 袋中有若干枚均匀硬币,其中一部分是普通硬币,其余的两面均为正面,已知普通硬币占总硬币数的比例为 $\theta\,(0<\theta<1)$. 从袋中任取一枚硬币,在不查看它属于哪种硬币的前提下,将其独立地连掷两次.

(1) 以 X 记掷出的正面数,求 X 的分布列;

(2) 将上述试验独立重复地进行 n 次,以 Y 记这 n 次试验中不出现正面的次数,求 Y 的分布列.

解析 （1）根据全概率公式可得分布列为

X	0	1	2
P	$1-\frac{3}{4}\theta$	$\frac{1}{2}\theta$	$\frac{1}{4}\theta$

（2）根据二项分布的计算方式，可得分布列为

$$P(Y=k)=\mathrm{C}_n^k\left(\frac{3}{4}\theta\right)^k\cdot\left(1-\frac{3}{4}\theta\right)^{n-k}.$$

4. 已知椭圆 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，F_1,F_2 分别为椭圆 L 的左右焦点，点 $\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆上，设 A 为椭圆 L 上一个动点，弦 AB,AC 分别过焦点 F_1,F_2 ，且 $\overrightarrow{AF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1B}$ ，$\overrightarrow{AF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2C}$.

（1）求椭圆 L 的方程；

（2）求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值；

（3）求 $\triangle F_1AC$ 的面积 S 的最大值.

解析 （1）椭圆 L 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）设 A 点坐标为 (x_1,y_1) ，B 点坐标为 (x_2,y_2) ，C 点坐标为 (x_3,y_3) . 由

$$\overrightarrow{AF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1B},\overrightarrow{AF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2C},$$

可得

$$x_2=-\frac{1+x_1}{\lambda_1}-1,x_3=\frac{1-x_1}{\lambda_2}+1.$$

由椭圆的焦准性质可知，$\lambda_1=\frac{x_1+2}{x_2+2}$ ，将 $x_2=-\frac{1+x_1}{\lambda_1}-1$ 代入上式，可得 $\lambda_1=2x_1+3$ ；同理，$\lambda_2=\frac{2-x_1}{2-x_3}$ ，将 $x_3=\frac{1-x_1}{\lambda_2}+1$ 代入上式，可得 $\lambda_2=-2x_1+3$.

所以 $\lambda_1+\lambda_2=6$.

（3）当直线 AC 的方程为 $x=1$ 时，$\triangle F_1AC$ 的面积 S 取到最大值 $\sqrt{2}$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n>0$ ，$a_n+a_n^2+\cdots+a_n^n=\frac{1}{2}\,(n=1,2,\cdots)$. 证明：

（1）$a_n>a_{n+1}\,(n=1,2,\cdots)$ ；

（2）对于任意给定的 $0<\varepsilon<1$ ，总存在正整数 m ，当 $n>m$ 时，$0<a_n-\frac{1}{3}<\varepsilon$.

解析 （1）若 $\exists k\in\mathbb{N}_+$ ，使得 $0<a_k\leqslant a_{k+1}$ ，则

$$\frac{1}{2}=a_k+a_k^2+\cdots+a_k^k\leqslant a_{k+1}+a_{k+1}^2+\cdots+a_{k+1}^k<a_{k+1}+a_{k+1}^2+\cdots+a_{k+1}^k+a_{k+1}^{k+1}=\frac{1}{2},$$

矛盾. 所以 $a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$.

（2）显然 $0<a_n<1(n=1,2,\cdots)$ ，故有

$$\frac{1}{2}=a_n+a_n^2+\cdots+a_n^n=\frac{a_n\left(1-a_n^n\right)}{1-a_n}<\frac{a_n}{1-a_n},$$

所以 $a_n > \frac{1}{3}$.

由于数列 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，所以 $n \to \infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的极限存在．设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\left(1-a_n^n\right)}{1-a_n} = \frac{A}{1-A} = \frac{1}{2},$$

解得 $A = \frac{1}{3}$.

所以对于任意给定的 $0<\varepsilon<1$ ，总存在正整数 m ，当 $n>m$ 时，$0<a_n-\frac{1}{3}<\varepsilon$.

6. 已知集合

$$S_n = \{X|X=(x_1,x_2,\cdots,x_n), x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}, n \geqslant 2,$$

对于

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n, B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n,$$

定义 A 与 B 的差为

$$A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|),$$

且 A 与 B 之间的距离为

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|.$$

（1）对任意 $A,B,C\in S_n$ ，证明：$d(A-C,B-C)=d(A,B)$ ，且 $d(A,B)$ ，$d(A,C)$ ，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数；

（2）设 $P\subseteq S_n$ ，P 中有 $m\,(m\geqslant 2)$ 个元素，记 P 中所有两元素间的距离的平均值为 $\overline{d}(P)$ ，证明：$\overline{d}(P)\leqslant \frac{mn}{2(m-1)}$.

（3）当 $n=3$ 时，若 M 满足：$M\subseteq S_3$ 且 M 中元素间的距离均为 2 ，试写出含有元素个数最多的所有集合 M .

解析　(1) $d(A-C,B-C)=d(A,B)$ 显然成立．

因为 $(a_i-b_i)+(b_i-c_i)+(c_i-a_i)=0$ ，而 $(a_i-b_i)+(b_i-c_i)+(c_i-a_i)$ 与 $|a_i-b_i|+|b_i-c_i|+|c_i-a_i|$ 的奇偶性相同，故 $d(A,B)+d(A,C)+d(B,C)$ 是偶数．所以 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数．

(2) $\overline{d}(P)=\frac{1}{\mathrm{C}_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ ，其中 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和．

设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1 ，$m-t_i$ 个 0 ，则

$$\sum_{A,B\in P}d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}t_i(m-t_i).$$

由于 $t_i(m-t_i)\leqslant \frac{m^2}{4}(i=1,2,\cdots,n)$ ，所以 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\leqslant \frac{nm^2}{4}$.

从而 $\overline{d}(P)=\frac{1}{\mathrm{C}_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\leqslant \frac{nm^2}{4\mathrm{C}_m^2}=\frac{mn}{2(m-1)}$.

(3) S_3 中含有 8 个元素，可将其看成正方体的 8 个顶点. 易知集合 M 中的元素所对应的点，应该两两位于该正方体面对角线的两个端点处. 所以集合 $M=\{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$，或 $M=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$.