2015 年清华大学自主招生暨领军计划试题

兰琦

2017 年 3 月 1 日

说明：本试卷共 **30** 小题，共 **100** 分．在每小题给出的四个选项中，有一个或多个选项是符合题目要求的．全部选对的，得满分；选对但不全的，得部分分；有选错的，得 **0** 分．

1. 设复数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-z^2}=(\qquad)$

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

解析　B.

注意到 $z^3=1$，于是有 $\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-z^2}=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{z}{z-z^3}=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{-z}{1-z}=1$．

2. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，p,q,k,l 为正整数，则“$p+q>k+l$”是“$a_p+a_q>a_k+a_l$”的 $(\qquad)$

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　D.

$a_p+a_q>a_k+a_l$ 等价于 $(p+q-k-l)d>0$，其中 d 是等差数列的公差，于是 $p+q>k+l$ 是它的既不充分也不必要条件．

3. 设 A,B 是抛物线 $y=x^2$ 上的两点，O 是坐标原点．若 $OA\perp OB$，则 $(\qquad)$

A. $|OA|\cdot|OB|\geqslant 2$　　B. $|OA|+|OB|\geqslant 2\sqrt{2}$

C. 直线 AB 过抛物线 $y=x^2$ 的焦点　　D. O 到直线 AB 的距离小于等于 1

解析　ABD.

设 $A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，则根据题意，有 $x_1x_2+x_1^2x_2^2=0$，从而 $x_1x_2=-1$．

对于选项 A，有 $|OA|\cdot|OB|=\sqrt{x_1^2+x_1^4}\cdot\sqrt{x_2^2+x_2^4}=\sqrt{2+x_1^2+x_2^2}\geqslant 2$；

对于选项 B，有 $|OA|+|OB|\geqslant 2\sqrt{|OA|\cdot|OB|}\geqslant 2\sqrt{2}$；

对于选项 C，直线 AB 的纵截距为 $\dfrac{x_1x_2^2-x_2x_1^2}{x_1-x_2}=1$，于是直线 AB 恒过点 $(0,1)$，而非恒过焦点；

对于选项 D，由于直线 AB 恒过点 $(0,1)$，于是 O 到直线 AB 的距离不大于 1．

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，且满足：

① $f(x)>0$，$x\in(-1,0)$；

② $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$，$x,y\in(-1,1)$，

则 $f(x)$ 为 $(\qquad)$

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 减函数　　D. 有界函数

解析　AC.

在 ② 中，令 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$，令 $y=-x$，有 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，于是函数 $f(x)$ 为奇函数；

由 ①，$f(x)$ 不可能为偶函数（与函数 $f(x)$ 有非零函数值矛盾）；

当 $-1<x<y\leqslant 0$ 时，由于 $\dfrac{x-y}{1-xy}\in(-1,0]$，于是有

$$f(x)-f(y)=f(x)+f(-y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)>0,$$

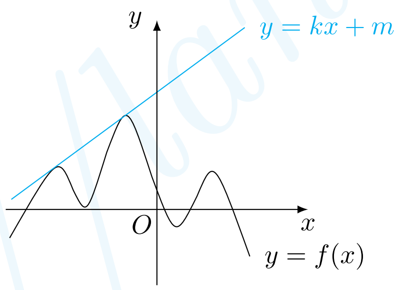
因此函数 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，又 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减；

考虑到当 $x,y\to 1$ 时，由 ② 可得“$2f(1)=f(1)$”，这对有界函数是不可能的. 下面证明函数 $f(x)$ 无界. 设 $f(m)=p$，其中 $m\in(0,1)$，令 $h_1(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$h_{n+1}(x)=h(h_n(x))$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$f(h_n(m))=2^n\cdot p, n=1,2,\cdots,$$

因此 $f(x)$ 无界.

5. 如图，已知直线 $y=kx+m$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于两点，则 $F(x)=f(x)-kx$ 有（　　）



A. 2 个极大值点　　B. 3 个极大值点　　C. 2 个极小值点　　D. 3 个极小值点

解析　BC.

相当于以直线 $y=kx+m$ 为 x 轴观察函数 $y=f(x)$ 的图象的极值点.

6. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a,b,c. 若 $c=2$，$\angle C=\dfrac{\pi}{3}$，且满足 $\sin C+\sin(B-A)-2\sin 2A=0$，则（　　）

A. $b=2a$　　B. $\triangle ABC$ 的周长为 $2+2\sqrt{3}$

C. $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解析　BCD.

将 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$ 代入题中等式，可得 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，于是 $A=\dfrac{\pi}{6},B=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $A=\dfrac{\pi}{2},B=\dfrac{\pi}{6}$. 进而可以计算 $\triangle ABC$ 的周长，面积以及外接圆半径.

7. 设函数 $f(x)=\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^x$，则（　　）

A. $f(x)$ 有极小值，但无最小值

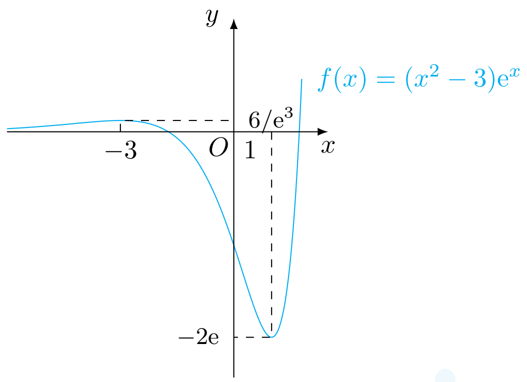
B. $f(x)$ 有极大值，但无最大值

C. 若方程 $f(x)=b$ 恰有一个实根，则 $b>\dfrac{6}{e^3}$

D. 若方程 $f(x)=b$ 恰有三个不同实根，则 $0<b<\dfrac{6}{e^3}$

解析　BD.

函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=e^x\cdot\left(x^2+2x-3\right)$，可以画出函数草图如下：



对于选项 C，b 的取值范围还应包含 $b=-2e$.

8. 已知 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2=r^2\right\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right\}$，已知 $A\cap B=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$，则（　　）

A. $0<a^2+b^2<2r^2$

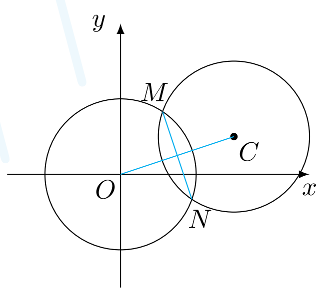
B. $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$

C. $x_1+x_2=a$，$y_1+y_2=b$

D. $a^2+b^2=2ax_1+2by_1$

解析　BCD.

如图.



对于选项 A，两圆相交，有 $0<|OC|<2r$，即 $0<a^2+b^2<4r^2$；

对于选项 B，$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{OC}$，即 $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$；

对于选项 C，线段 MN 与线段 OC 平分，于是 $x_1+x_2=a$，$y_1+y_2=b$；

对于选项 D，将 $M(x_1,y_1)$ 满足的两个圆的方程相减即得.

9. 已知非负实数 x,y,z 满足 $4x^2+4y^2+z^2+2z=3$，则 $5x+4y+3z$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析　C.

条件即

$$(2x)^2+(2y)^2+(z+1)^2=4,$$

令 $a=2x$ ，$b=2y$ ，$c=z+1$ ，则问题转化为已知 $a^2+b^2+c^2=4$ ，且 $a,b\geqslant 0$ ，$c\geqslant 1$ ，求 $\frac{5}{2}a+2b+3c-3$ 的最小值．由于 $(a,b,c)\cdot\left(\frac{5}{2},2,3\right)$ 在边界处取得最小值，因此不难计算得其最小值为 6 ，于是原式最小值为 3 ．

事实上，显然 $x,y,z\in[0,1]$ ，于是

$$5x+4y+3z\geqslant 4x^2+4y^2+3z=-z^2+z+3=z(1-z)+3\geqslant 3,$$

等号当 $x=y=0$ 且 $z=1$ 时取得．

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ．若对任意的正整数 n ，总存在正整数 m ，使得 $S_n=a_m$ ，则（　　）

A. $\{a_n\}$ 可能为等差数列

B. $\{a_n\}$ 可能为等比数列

C. $\{a_n\}$ 的任意一项均可写成 $\{a_n\}$ 的两项之差

D. 对任意正整数 n ，总存在正整数 m ，使得 $a_n=S_m$

解析　AC.

对于选项 A，取 $a_n=n,n=1,2,\cdots$ 即可；

对于选项 B，若 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q ，显然 $q\neq\pm 1$ ．根据题意，对任何正整数 n ，均有

$$1+q+\cdots+q^n=q^{m_1},$$

以及

$$(1+q+\cdots+q^n)(1+q^{n+1})=1+q+\cdots+q^n+q^{n+1}+\cdots+q^{2n+1}=q^{m_2},$$

其中 m_1,m_2 均为正整数．两式相比，有

$$1+q^{n+1}=q^{m_2-m_1}.$$

当 $|q|>1$ 时，取 n 为奇数，此时 $q^{m_2-m_1}\geqslant|q|^{n+2}$ ，当 n 足够大时，方程必然无解；

当 $|q|<1$ 且 $q\neq 0$ 时，$|q^{m_2-m_1}|$ 或者在区间 $(0,|q|]$ 内，或者在区间 $\left[\frac{1}{|q|},+\infty\right)$ 内，因此当 n 足够大时，必然可以使得 $\left|1+q^{n+1}\right|$ 落在区间 $\left(|q|,\frac{1}{|q|}\right)$ 内，此时方程无解．

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 不可能是等比数列．

如果不考虑第一项，那么可以构造 $2,2,4,8,16,\cdots$ 或 $0,1,-1,1,-1,\cdots$ ．

对于选项 C，取 $n=2$ ，有 $a_1+a_2=a_m$ ，于是 a_1 可以写成两项之差；另一方面，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{m_1}-a_{m_2},$$

也可以写成两项之差．因此命题成立．

对于选项 D，取 $a_n=n,n=1,2,\cdots$ 即为反例．

11. 运动会上，有 6 名选手参加 100 米比赛，观众甲猜测：4 道或 5 道的选手得第一名；观众乙猜测：3 道的选手不可能得第一名；观众丙猜测：$1,2,6$ 道选手中的一位获得第一名；观众丁猜测：$4,5,6$ 道的选手都不可能获得第一名．比赛后发现没有并列名次，且甲、乙、丙、丁中只有 1 人猜对比赛结果，此人是 (　　)

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

解析　D.

由于甲的判断正确或者丙的判断正确都会导致乙的判断正确，因此甲、丙的判断均错误，此时乙的判断必然错误，故丁的判断正确．

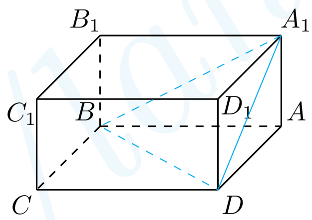
12. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AD=AA_1=1$，则点 A 到平面 A_1BD 的距离为 (　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解析　B.

如图，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系 $A-BDA_1$，则平面 A_1BD 的法向量为 $\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$，从而易得所求距离为

$$\frac{(2,0,0)\cdot\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$



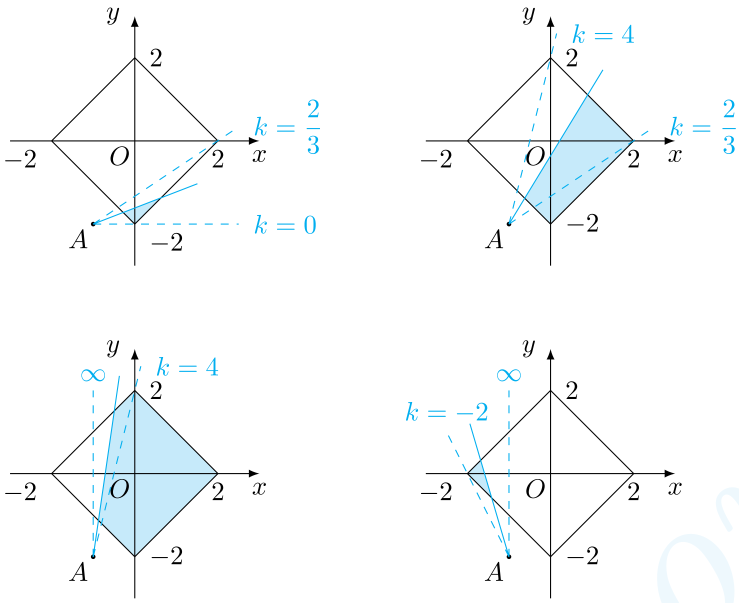
13. 设不等式组 $\begin{cases}|x|+|y|\leqslant 2,\\ y+2\leqslant k(x+1),\end{cases}$ 所表示的区域为 D，其面积为 S，则 (　　)

A. 若 $S=4$，则 k 的值唯一　　B. 若 $S=\dfrac{1}{2}$，则 k 的值有 2 个

C. 若 D 为三角形，则 $0<k\leqslant\dfrac{2}{3}$　　D. 若 D 为五边形，则 $k>4$

解析　ABD.

如图，随着 k 的不同，区域形状随之变化．

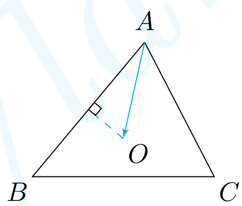


14. $\triangle ABC$ 的三边长是 $2,3,4$，其外心为 O，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CA}=(\quad)$

A. 0　　B. -15　　C. $-\dfrac{21}{2}$　　D. $-\dfrac{29}{2}$

解析　D.

如图，注意到 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}c^2$，于是原式的值为 $-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=-\dfrac{29}{2}$.



15. 设随机事件 A 与 B 互相独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.2$，则 $(\quad)$

A. $P(A)=0.4$　　B. $P(B-A)=0.3$　　C. $P(AB)=0.2$　　D. $P(A+B)=0.9$

解析　ABC.

根据题意，有如下联表：

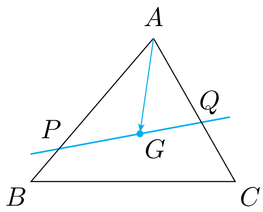
	A	$\overline{A}$
B	0.2	0.3
$\overline{B}$	0.2	0.3

16. 过 $\triangle ABC$ 的重心作直线将 $\triangle ABC$ 分成两部分，则这两部分的面积之比的 $(\quad)$

A. 最小值为 $\dfrac{3}{4}$　　B. 最小值为 $\dfrac{4}{5}$　　C. 最大值为 $\dfrac{4}{3}$　　D. 最大值为 $\dfrac{5}{4}$

解析　BD.

如图，不妨设直线与边 AB 以及 AC 相交，交点分别为 P,Q，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\triangle APQ$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $\lambda\mu$.



由于 $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，因此 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{3\mu}\overrightarrow{AQ}$，从而 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=3$，且 $\lambda,\mu\in(0,1]$．不难求得 $\lambda\mu$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{2}\right]$，因此 $\triangle ABC$ 被直线 PQ 分成的两部分的面积之比的取值范围是 $\left[\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{4}\right]$．

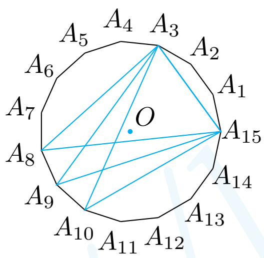
17. 从正 15 边形的顶点中选出 3 个构成钝角三角形，则不同的选法有（　　）

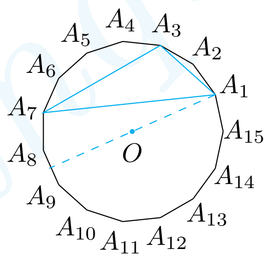
A. 105 种　　B. 225 种　　C. 315 种　　D. 420 种

解析　C.

方法一

如左图，先从 15 个顶点中任选一个点（以 A_{15} 为例），那么以该点为顶点的三角形共有 $\mathrm{C}_{14}^2=91$ 个．接下来思考这些三角形中锐角三角形的个数．





显然三角形内部包含正 15 边形的中心时为锐角三角形，因此锐角三角形的另外两个顶点必然分别在 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 以及 $A_8,A_9,\cdots,A_{14}$ 中．当其中一个顶点为 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 时，另外一个顶点可能的位置分别有 $1,2,\cdots,7$ 个，共计 28 个．

这样，我们就得到了所有的钝角三角形有 $\dfrac{1}{3}\cdot(91-28)\cdot 15=315$ 个．

方法二

如右图，我们规定以逆时针方向为正方向．若某个三角形在正方向意义下的“起点”为 A_1，则“该三角形为钝角三角形”的充要条件为“其余两个顶点选自于 $A_2,A_3,\cdots,A_8$ 这 7 个点”．故以 A_1 为“起点”的钝角三角形共有 $\mathrm{C}_7^2=21$ 个．因此所有的钝角三角形有 $21\times 15=315$ 个．

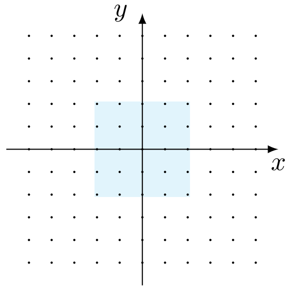
注　一般地，对正 $2k+1$ 边形，钝角三角形有 $\dfrac{1}{2}k(k-1)(2k+1)$ 个．

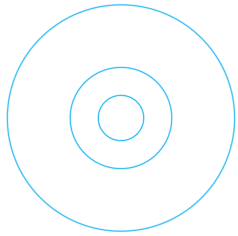
18. 已知存在实数 r，使得圆周 $x^2+y^2=r^2$ 上恰好有 n 个整点，则 n 可以等于（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

解析　ACD.

由对称性可知 n 必然为 4 的倍数，当 $r=1,\sqrt{5},5$ 时，n 分别为 $4,8,12$，如图．





19. 设复数 z 满足 $2|z| \leqslant |z-1|$，则（　　）

A. $|z|$ 的最大值为 1

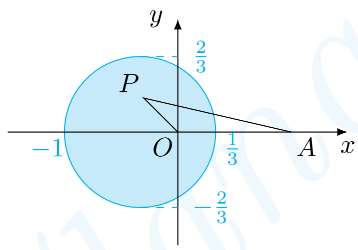
B. $|z|$ 的最小值为 $\dfrac{1}{3}$

C. z 的虚部的最大值为 $\dfrac{2}{3}$

D. z 的实部的最大值为 $\dfrac{1}{3}$

解析　ACD.

设复平面上 $A(1,0)$，复数 z 对应的点为 P，则满足条件的 P 在以 $\left(\dfrac{1}{3},0\right)$，$(-1,0)$ 为直径端点的圆内部（包括圆周），如图.



20. 设 m,n 是大于零的实数，向量 $\mathbf{a}=(m\cos\alpha, m\sin\alpha)$，$\mathbf{b}=(n\cos\beta, n\sin\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in[0,2\pi)$．定义向量 $\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{m}\cos\dfrac{\alpha}{2},\sqrt{m}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$，$\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{n}\cos\dfrac{\beta}{2},\sqrt{n}\sin\dfrac{\beta}{2}\right)$，记 $\theta=\alpha-\beta$，则（　　）

A. $\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}=\mathbf{a}$

B. $\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mn}\cos\dfrac{\theta}{2}$

C. $\left|\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}-\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}\right|^2\geqslant 4\sqrt{mn}\sin^2\dfrac{\theta}{4}$

D. $\left|\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}+\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}\right|^2\geqslant 4\sqrt{mn}\cos^2\dfrac{\theta}{4}$

解析　BCD.

对于选项 A，$\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}=m\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+m\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=m$；

对于选项 B，$\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{mn}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\right)=\sqrt{mn}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{mn}\cos\dfrac{\theta}{2}$；

对于选项 C、D，有 $\left|\mathbf{a}^{\frac{1}{2}}\pm\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}\right|^2=m+n\pm2\sqrt{mn}\cos\dfrac{\theta}{2}\geqslant2\sqrt{mn}\left(1\pm\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$，由余弦的二倍角公式即得.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=6$，$a_{n+1}=\dfrac{n+3}{n}a_n$，则（　　）

A. $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n<(n+1)^3$

B. $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n\neq 2015$

C. $\exists n\in\mathbb{N}^*, a_n$ 为完全平方数

D. $\exists n\in\mathbb{N}^*, a_n$ 为完全立方数

解析　AB.

根据递推公式，不难得到 $a_n=n(n+1)(n+2)\ (n\in\mathbb{N}^*)$，因此选项 A 正确，选项 C、D 错误．又 $2015=5\times13\times31$，于是选项 B 正确.

22. 在极坐标系中，下列方程表示的图形是椭圆的有（　　）

A. $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

B. $\rho=\dfrac{1}{2+\sin\theta}$

C. $\rho=\dfrac{1}{2-\cos\theta}$

D. $\rho=\dfrac{1}{1+2\sin\theta}$

解析　BC.

由圆锥曲线的统一极坐标方程 $\rho=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}$，可得选项 B、C 均为椭圆，选项 D 为双曲线. 选项 A 是直线.

23. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x^2-x+1}$，则（　）

A. $f(x)\leqslant\dfrac{4}{3}$

B. $|f(x)|\leqslant 5|x|$

C. 曲线 $y=f(x)$ 存在对称轴

D. 曲线 $y=f(x)$ 存在对称中心

解析　ABC.

对于选项 A，考虑到分子的取值范围是 $[-1,1]$，分母的取值范围是 $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$，于是其最大值为 $\dfrac{4}{3}$，在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取得;

对于选项 B，$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=\left|\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\right|\cdot\dfrac{\pi}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\leqslant\dfrac{4\pi}{3}<5$，因此选项 B 正确;

对于选项 C，函数 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$，对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$;

对于选项 D，若函数 $f(x)$ 有对称中心，那么它必然为周期函数，矛盾.

24. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a,b,c，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则（　）

A. $\sin A>\cos B$　　B. $\tan A>\cot B$　　C. $a^2+b^2>c^2$　　D. $a^3+b^3>c^3$

解析　ABC.

对于选项 A，由 $A+B>\dfrac{\pi}{2}$ 可得 $A>\dfrac{\pi}{2}-B$，于是 $\sin A>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$，即 $\sin A>\cos B$;

对于选项 B，由 $A+B>\dfrac{\pi}{2}$ 可得 $A>\dfrac{\pi}{2}-B$，于是 $\tan A>\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$，即 $\tan A>\cot B$;

对于选项 C，由 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，于是 $a^2+b^2>c^2$;

对于选项 D，a,b,c 的值分别为 $4,5,6$ 即为反例.

25. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$，若 $f(0)=f'(0)=1$，则存在实数 $\delta\in(0,1)$，使得（　）

A. $f(x)>0$，$x\in(-\delta,\delta)$

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 上单调递增

C. $f(x)>1$，$x\in(0,\delta)$

D. $f(x)>1$，$x\in(-\delta,0)$

解析　AC.

对于选项 A，由 $f'(0)=1$ 可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又因为 $f(0)=1>0$，故由极限的保号性可知，A 正确.

对于选项 B，取 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\in\mathbb{Q},\\ -x^2+x+1, & x\in\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}.\end{cases}$ 即为反例，B 错误.

对于选项 C，由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1>0$，故由极限的保号性可知，存在实数 $\delta\in(0,1)$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)-1}{x}>0$，即 $f(x)>1$，C 正确.

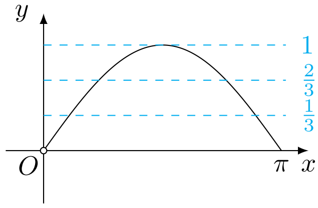
对于选项 D，若存在实数 $\delta\in(0,1)$，当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)>1$，则当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}<0$，所以 $f'(0)=f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqslant0$，这与 $f'(0)=1>0$ 矛盾，D 错误.

26. 在直角坐标系中，已知 $A(-1,0)$ ，$B(1,0)$. 若对于 y 轴上的任意 n 个不同点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ ，总存在两个不同点 P_i,P_j ，使得 $|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\dfrac{1}{3}$ ，则 n 的最小值为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析　B.

不影响问题的本质，将 y 轴负半轴上的点对称到 y 轴正半轴上，这样点 P_i 与 $(0,\pi]$ 上的角一一对应.



如图，把函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\pi]$ 上的图象所在的区域划分为三个条形区域. 若 $n=4$ ，那么至少有两个点落在同一个条形区域，此时这两点即满足要求. 若 $n=3$ ，那么可以取 P_1 对应的角非常靠近 0 ，P_2 对应的角为 $\dfrac{\pi}{6}$ ，P_3 非常靠近 $\dfrac{\pi}{2}$ ，此时不符合题意.

综上所述，n 的最小值为 4 .

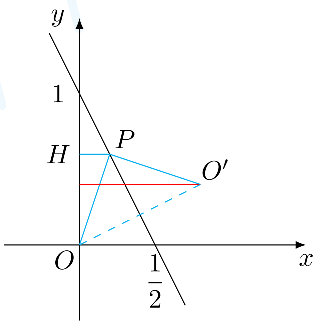
27. 设非负实数 x,y 满足 $2x+y=1$ ，则 $x+\sqrt{x^2+y^2}$ 的（　　）

A. 最小值为 $\dfrac{4}{5}$　　B. 最小值为 $\dfrac{2}{5}$　　C. 最大值为 1　　D. 最大值为 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$

解析　AC.

方法一

设 P 在 y 轴上的投影为 H ，则 $x+\sqrt{x^2+y^2}=PO+PH$ ，如图. 作原点 O 关于直线 $2x+y=1$ 的对称点 $O'\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ ，则 $PO+PH=O'P+PH$.



由图不难得到 $O'P+PH$ 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$ ，而最大值为 1 .

方法二

$x+\sqrt{x^2+y^2}\leqslant x+(x+y)=1$ ，当且仅当 $(x,y)=(0,1)$ 或 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 时等号成立.

由柯西不等式，可知 $(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geqslant(3x+4y)^2$ ，故 $x+\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x+\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=\dfrac{4}{5}$ ，当且仅当 $(x,y)=\left(\dfrac{3}{10},\dfrac{2}{5}\right)$ 时等号成立.

综上所述，$x+\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$ ，最大值为 1 .

28. 对于 50 个黑球和 49 个白球的任意排列 (从左到右排成一行)，则 (　　)

A. 存在一个黑球，它右侧的白球和黑球一样多

B. 存在一个白球，它右侧的白球和黑球一样多

C. 存在一个黑球，它右侧的白球比黑球少一个

D. 存在一个白球，它右侧的白球比黑球少一个

解析　A.

将 49 个连续白球放在左边，将 50 个连续黑球放在右边，可知选项 B、D 错误，将 49 个连续白球放在右边，将 50 个连续黑球放在左边，可知选项 C 错误.

对于选项 B，当黑球开头或黑球结尾时显然符合要求，否则考虑每个黑球右侧黑球与白球的数量之差 d，第一个黑球对应的 $d>0$，最后一个黑球对应的 $d<0$，因此必然存在某个黑球对应的 d 为 0. 事实上，将相邻的黑球与白球“抵消”掉，最后会只剩下一个黑球，这个黑球在原来队列中的位置就是满足要求的黑球位置.

29. 从 $1,2,3,4,5$ 中挑出三个不同数字组成五位数，其中有两个数字各用两次，例如 12231，则能得到的不同的五位数有 (　　)

A. 300 个　　B. 450 个　　C. 900 个　　D. 1800 个

解析　C.

$$\mathrm{C}_5^3\cdot\mathrm{C}_3^2\cdot\frac{\mathrm{A}_5^5}{\mathrm{A}_2^2\cdot\mathrm{A}_2^2}=900.$$

30. 设曲线 L 的方程为 $y^4+\left(2x^2+2\right)y^2+\left(x^4-2x^2\right)=0$，则 (　　)

A. L 是轴对称图形

B. L 是中心对称图形

C. $L\subset\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 1\right\}$

D. $L\subset\left\{(x,y)\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$

解析　ABD.

记 $f(x,y)=y^4+(2x^2+2)y^2+(x^4-2x^2)$，则

对于选项 A、B，由于 $f(-x,y)=f(-x,-y)=f(x,y)$，于是 L 既为轴对称图形，也为中心对称图形；

对于选项 C，由于 $y^2=\sqrt{4x^2+1}-(x^2+1)$，令 $y=0$，可得 $x=\pm\sqrt{2},0$，因此选项 C 错误；

对于选项 D，由于 $x^2=-y^2+1\pm\sqrt{-4y^2+1}$，于是 $-4y^2+1\geqslant 0$，即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$.

事实上，该方程对应的曲线如图.