2014 年北京大学全国优秀中学生体验营数学试卷

兰琦

2017 年 3 月 1 日

说明：文科考生做前 **5** 题，理科考生做后 **5** 题，每题 **20** 分，共 **100** 分．

1. 设关于 x 的方程 $x^2-ax+2a-2=0$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ 内有根，求实数 a 的取值范围．

   解析　$\left[-\dfrac{1}{2},4-2\sqrt{2}\right]$．

   分离变量．

2. 设 a,b,c 满足 $a+b+c=a^3+b^3+c^3=0$，n 为任意自然数，求 $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ 的值．

   解析　0

   $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$，于是 $abc=0$．．

3. 证明：若 n 为不小于 2 的自然数，t 为实数且 $\sin\dfrac{t}{2}\neq 0$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\sum_{p=1}^{k-1}2\cos pt\right)=\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

   解析　略

   可以两次裂项求和，也可以用数学归纳法．

4. 一个等腰梯形的腰和底的长分别为 $\sqrt{2}$ 和 3，求这个梯形面积的最大值．

   解析　$\dfrac{7\sqrt{7}}{4}$

   面积最大时，上底长为 3，设底角为 x，面积为 $3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x$，利用导数可得当 $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 时面积最大．

5. 求出所有实数 x，使得 $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ 与 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 同时为整数．

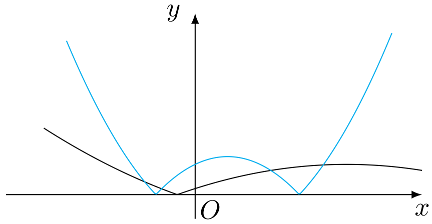
   解析　$-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},1$

   显然 $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}\neq 0$，于是

$$\left|x^2+4x-1\right|\geqslant\left|7x^2-6x-5\right|,$$

   解得

$$-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{3}\vee 1\leqslant x\leqslant 2.$$

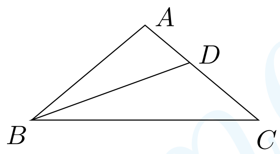


考虑到 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 为整数，于是 $x=\dfrac{2}{k}-1$，其中 $k\in\mathcal{Z}$．于是 x 的所有可能的值为

$$1,0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-\frac{3}{5},-\frac{2}{3},-\frac{5}{7},-\frac{3}{4},$$

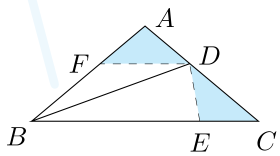
逐一验证即得．

6. 顶点为 A 的等腰三角形 ABC 的角 B 的平分线交 AC 于 D，已知 $BC=BD+AD$，求角 A 的度数．



解析　$A=100^\circ$

在线段 BC 上截取 $BE=BD$，过 D 作 BC 的平行线交 AB 于 F，则 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ECD$ 全等，进而可求得 $A=100^\circ$．



7. 设 a,b,c 是实数，方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有 3 个正根，证明 $2a^3+9c\leqslant 7ab$，并且等号成立当且仅当这 3 个正根相等．

解析　略．

设方程的根为 x_1,x_2,x_3，则

$$7ab-2a^3-9c=\sum_{cyc}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2\geqslant 0,$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$．