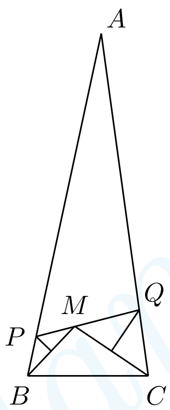
2013 年北京大学保送生试题

兰琦

2017 年 3 月 1 日

1. $\triangle ABC$ 的内点 M 满足 $\angle CMB=100^\circ$，线段 BM 的中垂线交边 AB 于 P，线段 CM 的中垂线交边 AC 于 Q，已知：P、M、Q 三点共线，求 $\angle CAB$．



解析　如图，

$$\angle PBM+\angle QCM=\angle PMB+\angle QMC=180^\circ-\angle BMC=80^\circ,$$
$$\angle MBC+\angle MCB=180^\circ-\angle BMC=80^\circ.$$

于是

$$\angle ABC+\angle ACB=(\angle PBM+\angle QCM)+(\angle MBC+\angle MCB)=160^\circ,$$

所以 $\angle BAC=20^\circ$．

2. 正数 a,b,c 满足 $a<b+c$，求证：$\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$．

解析　因为

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a}=\frac{1}{\frac{1}{a}+1}&<\frac{1}{\frac{1}{b+c}+1}\\&=\frac{b+c}{b+c+1}\\&=\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{b+c+1}\\&<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\end{aligned}$$

所以原不等式得证．

3. 是否存在两两不同的实数 a,b,c，使直角坐标系中的三条直线 $y=ax+b$，$y=bx+c$，$y=cx+a$ 共点.

解析　原问题即方程组 $ax+b=bx+c=cx+a$ 有解 (a,b,c,x)，其中 a,b,c 两两不同.

$$ax+b=bx+c=cx+a \Leftrightarrow x=\frac{c-b}{a-b}=\frac{a-c}{b-c}$$

整理

$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{a-c}{b-c},$$

得

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca,$$

即

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2=0,$$

与 a,b,c 两两不同矛盾.

于是不存在符合题意的实数对 (a,b,c).

4. 对 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的某非空子集，若其中所有元素的和为奇数，则称为奇子集，问奇子集的个数.

解析　设 $M=\{1,3,5,7,9\}$，$N=\{2,4,6,8\}$，则奇子集由 M 中的 1 个、3 个或 5 个元素以及 N 中的任意个元素组成. 因此奇子集共有

$$\left(\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^5\right)\cdot 2^4=256$$

个.

5. 在一个 2013×2013 的正数数表中，每行都成等差数列，每列平方后都成等差数列，求证：左上角的数和右下角的数之积等于左下角的数和右上角的数之积.

解析　下面证明对 $n\times n$ 的数表，$n\geqslant 3, n\in\mathcal{N}^*$，$n$ 是奇数，命题均成立.

当 $n=2k+1$ 时，不妨设数表如下.

a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{b^2+d^2}{2}}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c	$\cdots$	$\frac{c+d}{2}$	$\cdots$	d

于是

$$2\sqrt{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}{2}}=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+d^2}{2}},$$

即

$$(a+b)^2+(c+d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2+2\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)},$$

所以

$$(ab+cd)^2 = \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right),$$

也即

$$2abcd = b^2c^2 + a^2d^2,$$

因此

$$ad = bc.$$

由此命题成立.