2016 年高中数学联合竞赛试题（A 卷）

兰琦

2017 年 1 月 4 日

一试

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 设实数 a 满足 $a<9a^3-11a<|a|$，则 a 的取值范围是________.

   解析 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$.

   由 $a<|a|$，可得 $a<0$，于是原不等式即

$$\begin{cases}a<0,\\-1<\dfrac{9a^3-11a}{-a}<1,\end{cases}$$

   解得 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$.

2. 设复数 z,w 满足 $|z|=3$，$(z+\overline{w})(\overline{z}-w)=7+4\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，$\overline{z},\overline{w}$ 分别表示 z,w 的共轭复数，则 $(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)$ 的模为________.

   解析 $\sqrt{65}$.

   根据已知，有

$$z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{w}-z\cdot w+\overline{z}\cdot\overline{w}=7+4\mathrm{i},$$

   于是

$$\begin{cases}z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{w}=7,\\-z\cdot w+\overline{z}\cdot\overline{w}=4\mathrm{i}.\end{cases}$$

   于是

$$\begin{aligned}(z+2\overline{w})(\overline{z}-2w)&=z\cdot\overline{z}-4w\cdot\overline{w}-2z\cdot w+2\overline{z}\cdot\overline{w}\\&=4(z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{w})-3z\cdot\overline{z}+2(-z\cdot w+\overline{z}\cdot\overline{w})\\&=1+8\mathrm{i},\end{aligned}$$

   于是所求复数的模为 $\sqrt{65}$.

3. 正实数 u,v,w 均不等于 1，若 $\log_u(vw)+\log_v w=5$，$\log_v u+\log_w v=3$，则 $\log_w u$ 的值为________.

   解析 $\dfrac{4}{5}$.

令 $\log_v u = x$ ，$\log_w v = y$ ，则 $\log_w u = xy$ ，条件变为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}=5, \\ x+y=3, \end{cases}$$

从而解得 $xy=\dfrac{4}{5}$.

4. 袋子 A 中装有 2 张 10 元纸币和 3 张 1 元纸币，袋子 B 中装有 4 张 5 元纸币和 3 张 1 元纸币．现随机从两个袋子中各取出两张纸币，则 A 中剩下的纸币面值之和大于 B 中剩下的纸币面值之和的概率为________．

解析　$\dfrac{9}{35}$.

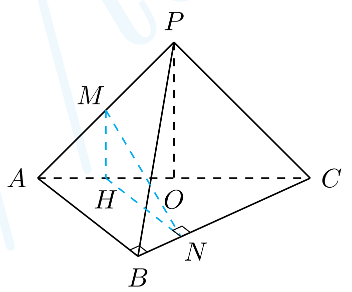
符合题意的情形只有 A 取走 2 张 1 元纸币，B 取走 2 张 5 元纸币或取走 1 张 5 元纸币和 1 张 1 元纸币，因此所求的概率为

$$\frac{C_3^2\cdot\left(C_4^2+C_4^1C_3^1\right)}{C_5^2C_7^2}=\frac{9}{35}.$$

5. 设 P 为圆锥的顶点，A,B,C 是其底面圆周上的三点，满足 $\angle ABC=90^\circ$ ，M 为 AP 的中点．若 $AB=1$ ，$AC=2$ ，$AP=\sqrt{2}$ ，则二面角 $M-BC-A$ 的大小为________．

解析　$\arctan\dfrac{2}{3}$.

如图，设 M 在底面 ABC 上的投影为 H ，过 H 作 $HN\perp BC$ 于点 N ，则 $\angle MNH$ 为所求二面角的平面角．



于是

$$\tan\angle MNH=\frac{MH}{HN}=\frac{\frac{1}{2}PO}{\frac{3}{4}AB}=\frac{2}{3},$$

从而所求二面角的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$.

6. 设函数 $f(x)=\sin^4\dfrac{kx}{10}+\cos^4\dfrac{kx}{10}$ ，其中 k 是一个正整数．若对任意实数 a ，均有 $\{f(x)\mid a<x<a+1\}=\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ ，则 k 的最小值为________．

解析　16 .

根据已知，有

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sin^2\frac{kx}{10}+\cos^2\frac{kx}{10}\right)^2-\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{kx}{10}\cdot\cos\frac{kx}{10}\right)^2 \\ &= 1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{kx}{5} \\ &= \frac{1}{4}\cos\frac{2kx}{5}+\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

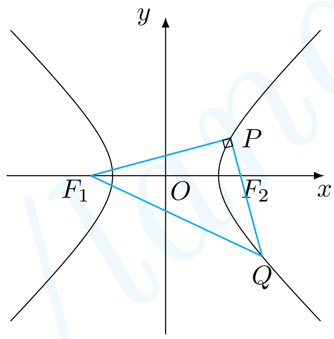
题意为任取函数 $f(x)$ 图象上在 x 轴上投影长度为 1 的一段 (不包含端点) 都能同时覆盖函数 $f(x)$ 的最大值点和最小值点，于是其最小正周期小于 1 ，从而 k 的最小值为 $[5\pi]+1=16$.

注　如果把“对任意实数 a”改为“存在实数 a”，那么题意即 $f(x)$ 的最小正周期小于 2 .

7. 双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ，左、右焦点分别为 F_1,F_2 ，过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右半支交于点 P,Q ，使得 $\angle F_1PQ=90^\circ$ ，则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆半径是________.

解析　$\sqrt{7}-1$.

如图， $F_1F_2=4$ ， $PF_1-PF_2=QF_1-QF_2=2$.



于是 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆的半径

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\left(PF_1+PQ-F_1Q\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(PF_1+PF_2+QF_2-F_1Q\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\left(PF_1^2+PF_2^2\right)-\left(PF_1-PF_2\right)^2}-\left(QF_1-QF_2\right)\right] \\ &= \sqrt{7}-1. \end{aligned}$$

8. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 $1,2,\cdots,100$ 中的 4 个互不相同的数，满足

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)=\left(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4\right)^2,$$

则这样的序列数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 的个数为________.

解析　40 .

由柯西不等式的取等条件可知 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_4}$ ，于是问题即从 $1,2,\cdots,100$ 中选出 4 个不同的数组成的等比数列的个数. 不难推知 a_1,a_2,a_3,a_4 必然形如 am^3,am^2n,amn^2,an^3 ，其中 a,m,n 均为正整数，

且 $m \neq n, (m,n)=1$. 考虑 $m<n$ 的情形，此时所有的 (m,n) 有

$$(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),$$

对应的等比数列个数之和为

$$\left[\frac{100}{2^3}\right]+2\cdot\left[\frac{100}{3^3}\right]+2\cdot\left[\frac{100}{4^3}\right]=20,$$

因此所求的有序数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 共有 40 个.

二、解答题：本大题共 3 小题，56 分.

9.（本题满分 16 分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. 求 $\sin C$ 的最大值.

解析　统一起点，有

$$\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+2\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB},$$

即

$$6\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA^2+2CB^2,$$

也即

$$\cos C=\frac{CA^2+2CB^2}{6CA\cdot CB}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{3},$$

等号当 $CA=\sqrt{2}\cdot CB$ 时取得. 因此 $\cos C$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ，对应 $\sin C$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

10.（本题满分 20 分）已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，$f(1)=1$ ，且对任意 $x<0$ ，均有 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=xf(x)$. 求

$$f(1)f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{50}\right)f\left(\frac{1}{51}\right)$$

的值.

解析　令 $x=-\dfrac{1}{n}$ ，$n\in\mathbb{N}^*$ ，则

$$\frac{x}{x-1}=\frac{-\dfrac{1}{n}}{-\dfrac{1}{n}-1}=\frac{1}{n+1},$$

于是有

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{1}{n}f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right),$$

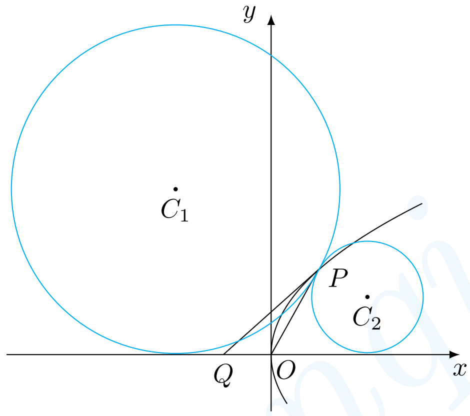
记 $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ，$n\in\mathbb{N}^*$ ，则有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{n}$ ，从而

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}.$$

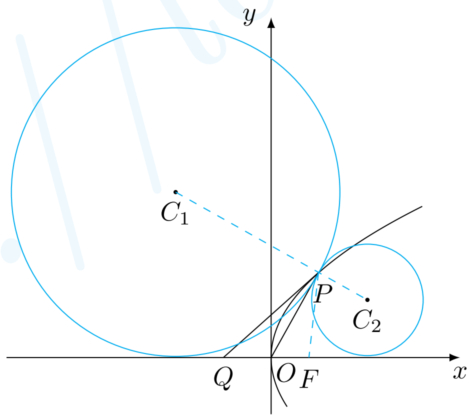
于是所求代数式即

$$\sum_{i=1}^{50} a_i a_{101-i} = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{(i-1)! \cdot (100-i)!} = \frac{1}{99!} \sum_{i=0}^{49} \mathrm{C}_{99}^{i} = \frac{1}{99!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{99} \mathrm{C}_{99}^{i} = \frac{2^{98}}{99!}.$$

11.（本题满分 20 分）如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是 x 轴正半轴上的一个动点，以 F 为焦点、O 为顶点作抛物线 C，设 P 是第一象限内 C 上的一点，Q 是 x 轴负半轴上一点，使得 PQ 为 C 的切线，且 $|PQ|=2$，圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P，且均与 x 轴相切，求点 F 的坐标，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值.



解析　如图，设抛物线方程为 $C: y^2=2px$，焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，连接 C_1C_2，PF.



设 $P\left(2pa^2, 2pa\right)$，则根据抛物线的光学性质，$|FQ|=|PF|$，于是 $Q\left(-2pa^2,0\right)$，进而由 $|PQ|=2$，可得

$$4p^2a^4+p^2a^2=1,$$

即

$$p^2a^2=\frac{1}{4a^2+1}.$$

圆心 C_1, C_2 都在过点 P 且与 OP 垂直的直线 l 上，设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=2pa^2+t, \\ y=2pa-at, \end{cases}$$

根据题意，C_1, C_2 对应的参数满足

$$\sqrt{1+a^2}\cdot|t| = 2pa - at,$$

即

$$t^2 + 4pa^2t - 4p^2a^2 = 0,$$

因此圆 C_1 的面积 S_1 与圆 C_2 的面积 S_2 之和

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &= \pi\left[\left(1+a^2\right)t_1^2 + \left(1+a^2\right)t_2^2\right] \\
&= \pi\left(1+a^2\right)\left[\left(-4pa^2\right)^2 + 2\cdot 4p^2a^2\right] \\
&= \pi\left(1+a^2\right)\left(16a^2+8\right)\cdot p^2a^2 \\
&= \frac{\pi\left(16a^4+24a^2+8\right)}{4a^2+1} \\
&= \pi\left(4a^2+1+\frac{3}{4a^2+1}+4\right) \\
&\geqslant \pi\left(4+2\sqrt{3}\right),
\end{aligned}$$

等号当 $4a^2+1=\sqrt{3}$ ，即 $a^2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ 时取得．此时

$$p^2 = \frac{1}{a^2\left(4a^2+1\right)} = \frac{4}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{3}},$$

于是 F 点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}, 0\right)$.

二试

一、（本题满分 40 分）设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$ 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2 (i = 1, 2, \cdots, 2015)$. 求

$$\left(a_1 - a_2^2\right)\cdot\left(a_2 - a_3^2\right)\cdots\left(a_{2015} - a_{2016}^2\right)\cdot\left(a_{2016} - a_1^2\right)$$

的最大值．

解析　令原式为 P . 由于 $a_i - a_{i+1}^2 > 0$ ，$i = 1, 2, \cdots, 2015$ ，因此只需要考虑当 $a_{2016} - a_1^2 > 0$ 的情况，记 $a_{2017} = a_1$ ，则

$$P^{\frac{1}{2016}} \leqslant \frac{1}{2016}\sum_{k=1}^{2016}\left(a_k - a_{k+1}^2\right) = \frac{1}{2016}\left(\sum_{k=1}^{2016}a_k - \sum_{k=1}^{2016}a_k^2\right) = \frac{1}{2016}\sum_{k=1}^{2016}\left[a_k\left(1-a_k\right)\right] \leqslant \frac{1}{4},$$

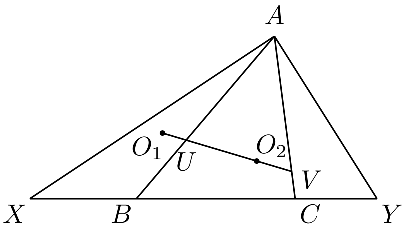
等号当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2016} = \dfrac{1}{2}$ 时取得．因此 P 的最大值为 $\dfrac{1}{4^{2016}}$.

二、（本题满分 40 分）如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，X, Y 是直线 BC 上两点（X, B, C, Y 顺次排列），使得

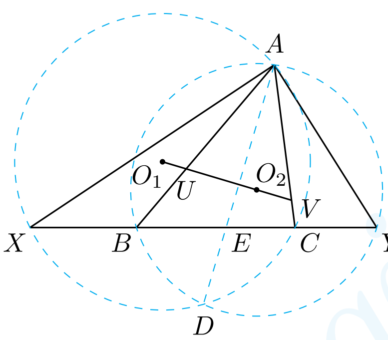
$$BX\cdot AC = CY\cdot AB.$$

设 $\triangle ACX, \triangle ABY$ 的外心分别为 O_1, O_2 ，直线 O_1O_2 与 AB, AC 分别交于点 U, V . 证明：$\triangle AUV$

是等腰三角形.



解析　如图，设圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦为 AD，AD 交 XY 于 E.



由于 AD 为两圆的根轴，于是 E 点对圆 O_1 和圆 O_2 的幂相等，从而

$$XE\cdot CE=BE\cdot YE,$$

进而结合合分比定理有

$$\frac{BE}{CE}=\frac{XE}{YE}=\frac{XB}{YC},$$

又由已知，有 $\dfrac{XB}{YC}=\dfrac{AB}{AC}$，于是有 $\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AB}{AC}$，从而 AE 是 $\angle BAC$ 的角平分线. 又 $AD\perp O_1O_2$，于是 U,V 关于直线 AD 对称，因此 $\triangle AUV$ 是等腰三角形.

三、（本题满分 50 分）给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上，将某些点之间用线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值.

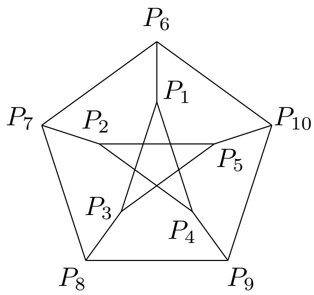
解析　记这 10 个点分别为 P_i 且从 P_i 点引出了 a_i 条线段，其中 $i=1,2,\cdots,10$. 这样图形中总共包含 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}a_i$ 条线段和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\mathrm{C}_{a_i}^2$ 个角. 根据题意，图形中没有空间四边形，因此任何一个角都与一个点对 (P_m,P_n) 一一对应，且不存在线段 P_mP_n. 这样就有

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}a_i+\sum_{i=1}^{10}\mathrm{C}_{a_i}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}a_i^2\leqslant \mathrm{C}_{10}^2,$$

于是所连线段数目

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}a_i\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot\sum_{i=1}^{10}a_i^2}=15.$$

接下来构造包含 15 条线段的图形，此时从每个顶点出发的线段数均为 3，如图.



四、（本题满分 50 分）设 p 与 $p+2$ 均是素数，$p>3$．数列 $\{a_n\}$ 定义为

$$a_1=2, a_n=a_{n-1}+\left\lceil\frac{pa_{n-1}}{n}\right\rceil, n=2,3,\cdots.$$

这里 $\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数．证明：对 $n=3,4,\cdots,p-1$ 均有 $n\mid pa_{n-1}+1$ 成立．

解析　首先注意，$\{a_n\}$ 是整数数列．

对 n 用数学归纳法．当 $n=3$ 时，由条件知 $a_2=2+p$，故 $pa_2+1=(p+1)^2$．因 p 与 $p+2$ 均是素数，且 $p>3$，故必须 $3\mid p+1$．因此 $3\mid pa_2+1$，即 $n=3$ 时结论成立．

对 $3<n\leqslant p-1$，设对 $k=3,\cdots,n-1$ 成立，此时 $\left\lceil\frac{pa_{k-1}}{k}\right\rceil=\frac{pa_{k-1}+1}{k}$，故

$$\begin{aligned}pa_{k-1}+1&=p\left(a_{k-2}+\left\lceil\frac{pa_{k-2}}{k-1}\right\rceil\right)+1\\&=p\left(a_{k-2}+\frac{pa_{k-2}+1}{k-1}\right)+1\\&=\frac{(pa_{k-2}+1)(p+k-1)}{k-1}.\end{aligned}$$

故对 $3<n\leqslant p-1$，有

$$\begin{aligned}pa_{n-1}+1&=\frac{p+n-1}{n-1}(pa_{n-2}+1)\\&=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}(pa_{n-3}+1)\\&=\cdots\\&=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}\cdots\frac{p+3}{3}(pa_2+1),\end{aligned}$$

因此

$$pa_{n-1}+1=\frac{2n(p+1)}{(p+n)(p+2)}\mathrm{C}_{p+n}^{n}.$$

由此知（注意 C_{p+n}^{n} 是整数）

$$n\mid(p+n)(p+2)(pa_{n-1}+1).$$

因 $n<p$，p 为素数，故 $(n,n+p)=(n,p)=1$，又 $p+2$ 是大于 n 的素数，故 $(n,p+2)=1$，从而 n 与 $(p+n)(p+2)$ 互素．故由 (1) 知 $n\mid pa_{n-1}+1$．由数学归纳法知，本题得证．