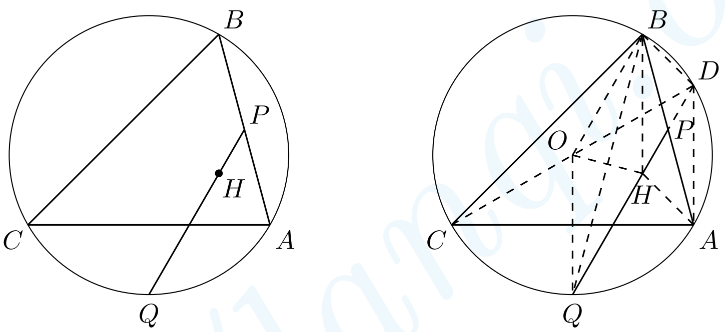
2016 年北京大学数学学科夏令营初赛

兰琦

2017 年 1 月 4 日

本试卷共 **4** 题，每题 **30** 分，满分 **120** 分，考试时间 **180** 分钟.

1. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^\circ$，P 为 AB 中点，Q 为外接圆上弧 AC(不包含点 B)的中点，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 如果 P,H,Q 三点共线，求 $\angle A$.



解析　如图，设 O 为外接圆圆心，延长 CO 交外接圆于 D，则四边形 $BHAD$ 为平行四边形，因此 D,P,H 三点共线，进而 D,P,H,Q 四点共线.

连接 OH,BQ，由 $\angle B=60^\circ$，于是

$$BH=AD=\frac{1}{2}CD=OQ,$$

又 $OB=OQ$，因此 $BHQO$ 为菱形，从而

$$\angle OBC=\angle OCB=\angle BAD=\angle HBA,$$

又

$$\angle BCD=\angle BQD=\angle OBQ=\angle HBQ,$$

因此 BO,BQ,BH 将 $\angle CBA$ 四等分，进而不难得知 $\angle A=75^\circ$.

2. 求所有的整系数多项式 $P(x)$，使得存在一个无穷项整数数列 $\{a_n\}$，其中任意两项互不相等，且满足：$P(a_1)=0$，$P(a_{k+1})=a_k$ ($k=1,2,\cdots$).

解析　设 $P(x)=\lambda_0+\lambda_1x+\cdots+\lambda_mx^m$，$m\in\mathbb{N}^*$，$\lambda_i\in\mathbb{Z}$ ($i=0,1,2,\cdots,m$)，则

$$P(a_{k+1})-P(a_{k+2})=a_k-a_{k+1},k=1,2,\cdots,$$

而

$$P(a_{k+1})-P(a_{k+2})=\lambda_1(a_{k+1}-a_{k+2})+\lambda_2(a_{k+1}^2-a_{k+2}^2)+\cdots+\lambda_m(a_{k+1}^m-a_{k+2}^m),$$

因此

$$(a_{k+1}-a_{k+2})\mid(a_k-a_{k+1}),k=1,2,\cdots,$$

因此

$$\left|a_1-a_2\right|\geqslant\left|a_2-a_3\right|\geqslant\cdots\geqslant\left|a_k-a_{k+1}\right|\geqslant\left|a_{k+1}-a_{k+2}\right|\geqslant\cdots.$$

由于 $\left|a_1-a_2\right|$ 的值有限，因此必然存在 K ，使得当 $k\geqslant K$ 时，有

$$\left|a_k-a_{k+1}\right|=\left|a_{k+1}-a_{k+2}\right|=\left|a_{k+2}-a_{k+3}\right|=\cdots.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 中任意两项互不相等，因此有

$$a_k-a_{k+1}=a_{k+1}-a_{k+2}=a_{k+2}-a_{k+3}=\cdots,k\geqslant K,k\in\mathbb{Z},$$

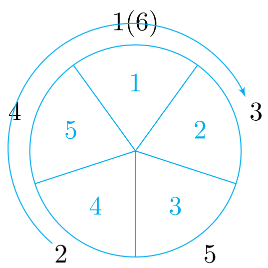
因此有

$$P(a_{k+1})-a_{k+1}=P(a_{k+2})-a_{k+2}=\cdots,k\geqslant K,k\in\mathbb{Z}.$$

若 $m\geqslant 2$ ，则方程 $P(x)-x=P(a_{K+1})-a_{K+1}$ 有无数个解，矛盾．这样得到了所有符合题意的整系数多项式 $P(x)=x+C$ ，其中常数 $C\in\mathbb{Z}$.

3. 给定正整数 n ，有 $2n$ 张纸牌叠成一堆，从上到下依次编号为 1 到 $2n$ ．我们进行这样的操作：每次将所有从上往下数偶数位置的牌抽出来，保持顺序放在牌堆下方．例如 $n=3$ 时，初始顺序为 123456 ，操作后依次得到 135246 ， 154326 ， 142536 ， 123456 ．证明：对任意正整数 n ，操作不超过 $2n-2$ 次后，这堆牌的顺序会变回初始状态．

解析　我们证明一个等价的命题，将每次操作改为先从上往下取后一半的数出来，然后与前一半交叉放置 (类似于洗扑克牌)，如初始顺序为 123456 ，操作后依次得到 142536 ， 154326 ， 135246 ， 123456 ．将纸牌按顺时针摆放，使得第一张牌和最后一张牌 (它们始终为 1 和 $2n$) 重合，将第一张牌的位置记为 1 ，顺时针旋转将其他牌的位置依次记为 $2,3,\cdots,2n-1$ ．定义纸牌 m 顺时针旋转到纸牌 n 时旋转的步数为纸牌 m 到 n 的距离，记为 $d(m\to n)$ ，如图中 $d(2\to 3)=3$.



下面证明经过 k 次操作 ($k\in\mathbb{N}^*$) 后 $d(1\to 2)=d(2\to 3)=\cdots=d(2n-1\to 2n)$ ，用数学归纳法.

归纳基础　当 $k=1$ 时，有 $d(1\to 2)=d(2\to 3)=\cdots=d(2n-1\to 2n)=1$ ，命题成立.

归纳假设与递推证明　设当 $k=p$ 时，有 $d(1\to 2)=d(2\to 3)=\cdots=d(2n-1\to 2n)=q$. 不难计算得经过操作后位置 x 的纸牌将会移动到位置

$$f(x)=(2x-1)\%(2n-1),$$

其中 $t\%s$ 表示 t 模 s 的余数，因此原来距离为 q 的纸牌在操作后距离为 $(2q)\%(2n-1)$. 因此经过 $p+1$ 次操作后，仍然有

$$d(1\to 2)=d(2\to 3)=\cdots=d(2n-1\to 2n).$$

综上所述，经过 k 次操作（$k\in\mathbb{N}^*$）后 $d(1\to 2)=d(2\to 3)=\cdots=d(2n-1\to 2n)$. 这就意味着当纸牌 2 的位置确定时，其他所有纸牌的位置都可以依靠该性质确定. 而纸牌 2 至多只有 $2n-2$ 种可能的位置[1]，因此经过不超过 $2n-2$ 次操作后，纸牌 2 必然回到位置 2，原命题得证.

4. 给定正整数 p,q ，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=1$ ，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（$n=1,2,3\cdots$）. 求证：要使得对任意正整数 m,n ，均有 $(a_m,a_n)=a_{(m,n)}$ ，当且仅当 $p=1$ 时成立.

解析　必要性　根据题意，有

$$\begin{aligned}
&a_1=1,\\
&a_2=1,\\
&a_3=p+q,\\
&a_4=p^2+pq+q,\\
&a_5=p^3+p^2q+2pq+q^2,\\
&a_6=p^4+p^3q+3p^2q+2pq^2+q^2,
\end{aligned}$$

而由 $(a_3,a_4)=a_1$ ，可得 $(p,q)=1$ ；又由 $(a_3,a_6)=a_3$ ，可得

$$p+q\mid p^2q+q^2,\text{ 即 }p+q\mid pq(p-1)+q(p+q),$$

因此 $p=1$.

充分性　当 $p=1$ 时，$a_{n+2}=a_{n+1}+qa_n$ ，于是

$$(a_{n+2},q)=(a_{n+1}+qa_n,q)=(a_{n+1},q)=\cdots=(a_1,q)=1,$$

进而

$$(a_{n+1},a_{n+2})=(a_{n+1},a_{n+1}+qa_n)=(a_{n+1},a_n)=\cdots=(a_1,a_2)=1.$$

记 $a_0=0$ ，用数学归纳法可以证明对任意 $m,n\in\mathbb{N}^*$ ，$m\leqslant n$ ，均有

$$a_n=a_ma_{n-m+1}+qa_{m-1}a_{n-m},$$

[1] 纸牌 2 的所在的位置不可能出现不包含位置 2 的循环. 这是因为操作是可以反向的，因此如果出现不包含位置 2 的循环，那么可以断定最初的状态纸牌 2 所在的位置不可能为 2 .

于是

$$(a_m, a_n) = (a_m, a_m a_{n-m+1} + q a_{m-1} a_{n-m}) = (a_m, a_{n-m}) = \cdots = (a_{(m,n)}, a_{(m,n)}) = a_{(m,n)},$$

原命题得证.