2016 年中国科学技术大学自主招生试题

兰琦

2017 年 1 月 4 日

1. 3^{2016} 除以 100 的余数为_____ .

解析　21 .

由于 $3^{2016}=9^{1008}=(10-1)^{1008}$ ，有

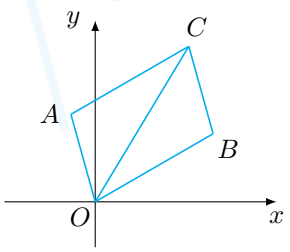
$$3^{2016}\equiv(-1)^{1008}+\mathrm{C}_{1008}^{1}\cdot(-1)^{1007}\cdot 10 \pmod{100},$$

于是 $3^{2016}\equiv 21 \pmod{100}$.

2. 复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=2$ ， $|z_2|=3$ ， $|z_1+z_2|=4$ ，则 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的值是_____ .

解析　$\dfrac{1}{6}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{6}\mathrm{i}$.

设复数 z_1,z_2,z_1+z_2 在复平面内的对应点分别为 A,B,C ，则四边形 $OACB$ 构成平行四边形．复数 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的模为 $\dfrac{2}{3}$ ，接下来求它的辐角．



在 $\triangle OAC$ 中应用余弦定理，有

$$\cos A=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{4},$$

于是 $\cos\angle AOB=\dfrac{1}{4}$ ，进而可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{15}}{6}\mathrm{i}.$$

3. 用 $S(A)$ 表示集合 A 的所有元素之和，且 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ， $S(A)$ 能被 3 整除，但不能被 5 整除，则符合条件的非空集合 A 的个数是_____ .

解析　70 .

将集合 A 划分为

$$A_1=\{1,4,7\},A_2=\{2,5,8\},A_3=\{3,6\},$$

于是使得 $S(A)$ 能被 3 整除的非空集合 A 的个数有

$$\left[(\mathrm{C}_3^0+\mathrm{C}_3^3)^2+(\mathrm{C}_3^1)^2+(\mathrm{C}_3^2)^2\right]\cdot 2^2-1=87.$$

接下来考虑 $S(A)$ 能被 15 整除的非空集合 A 的个数，此时 $S(A)=15$ 或 $S(A)=30$.

(1) $S(A)=15$. 此时按最大元素分别为 $8,7,6,5$ 分类，分别有 $5,4,3,1$ 个，共计 13 个.

(2) $S(A)=30$. 此时只需要考虑 $S(A)=6$ 的情形，共有 4 个.

综上所述，符合条件的非空集合 A 的个数为 $87-13-4=70$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\sin A+2\sin B\cos C=0$ ，则 $\tan A$ 的最大值是_____ .

解析 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ ，得

$$3\sin B\cos C+\cos B\sin C=0,\ 即\ 3\tan B+\tan C=0.$$

于是

$$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=\frac{2\tan B}{1+3\tan^2 B}=\frac{2}{\dfrac{1}{\tan B}+3\tan B}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3},$$

等号当 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\tan C=-\sqrt{3}$ 时取得. 因此 $\tan A$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 若对任意实数 x 都有 $|2x-a|+|3x-2a|\geqslant a^2$ ，则 a 的取值范围是_____ .

解析 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$.

易知函数 $f(x)=|2x-a|+|3x-2a|$ 在 $x=\dfrac{2a}{3}$ 处取得最小值 $f\left(\dfrac{2a}{3}\right)=\dfrac{|a|}{3}$ ，于是解不等式

$$\frac{|a|}{3}\geqslant a^2,\ 得\ -\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}.$$

因此 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$.

6. 若 $a\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ，$b\in(0,1)$ ，$x=(\sin a)^{\log_b\sin a}$ ，$y=(\cos a)^{\log_b\cos a}$ ，则 x____y (填 $>,=,<$).

解析 $>$.

取对数，可得

$$\ln x=\frac{\ln^2\sin a}{\ln b},\ln y=\frac{\ln^2\cos a}{\ln b},$$

而

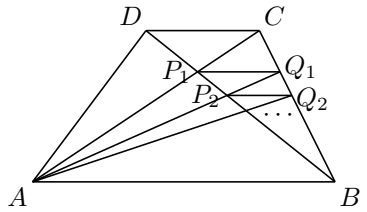
$$\sin a>\cos a\Rightarrow 0>\ln\sin a>\ln\cos a\Rightarrow\ln^2\sin a<\ln^2\sin b\Rightarrow\frac{\ln^2\sin a}{\ln b}>\frac{\ln^2\cos a}{\ln b},$$

因此 $\ln x>\ln y$ ，从而 $x>y$.

7. 梯形 $ABCD$ 中 $AB\parallel CD$ ，对角线 AC,BD 交于 P_1 ，过 P_1 作 AB 的平行线交 BC 于点 Q_1 . AQ_1 交 BD 于 P_2 ，过 P_2 作 AB 的平行线交 BC 于点 Q_2 ，$\cdots$. 若 $AB=a$ ，$CD=b$ ，则 $P_nQ_n=$_____ (用 a,b,n 表示).

解析 $\dfrac{ab}{a+bn}$.

如图.



设 $P_nQ_n = x_n\ (n\in\mathbb{N})$，则 $x_0 = CD = b$，且

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{a},$$

于是可得 $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{n}{a} + \dfrac{1}{x_0}$，即 $x_n = \dfrac{ab}{a+bn}\ (n\in\mathbb{N})$.

8. 数列 $\{a_n\}$ 中 a_n 是与 $\sqrt{n}$ 最接近的整数，则 $\sum\limits_{n=1}^{2016}\dfrac{1}{a_n} =$ _____ .

解析 $\dfrac{444}{5}$.

记 $k = \mathrm{round}(\sqrt{n})$，则有 $k = \left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$，即

$$k \leqslant \sqrt{n}+\frac{1}{2} < k+1,\ \text{也即}\ k^2-k+\frac{1}{4} \leqslant n < k^2+k+\frac{1}{4},$$

因此 $a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$ 为

$$\underbrace{1,1}_{2\text{ 个}},\underbrace{2,2,2,2}_{4\text{ 个}},\cdots,\underbrace{k,k,\cdots,k}_{2k\text{ 个}},\cdots,\underbrace{44,44,\cdots,44}_{88\text{ 个}},\underbrace{45,45,\cdots,45}_{36\text{ 个}},$$

进而可得

$$\sum_{n=1}^{2016}\frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{44}\left(\frac{1}{k}\cdot 2k\right) + \frac{1}{45}\cdot 36 = \frac{444}{5}.$$

9. 已知 $a,b,c>0$，$a+b+c=3$，求证：$\dfrac{a^2}{a+\sqrt{bc}} + \dfrac{b^2}{b+\sqrt{ca}} + \dfrac{c^2}{c+\sqrt{ab}} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

解析 由均值不等式，有

$$LHS \geqslant \sum_{cyc}\frac{2a^2}{2a+b+c},$$

再由柯西不等式，有

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2}{2a+b+c} \geqslant \frac{2(a+b+c)^2}{4(a+b+c)} = \frac{3}{2},$$

因此原不等式得证.

10. 求所有函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$，使得对任意正整数 $x\neq y$，$0<|f(x)-f(y)|<2|x-y|$.

解析 $f(n) = f(1)+n-1$，其中 $f(1)\in\mathbb{N}^*$.

http://lanqi.org

根据题意，取 $y=x+1$，则有对任意 $x\in\mathbb{N}^*$，均有

$$0<|f(x+1)-f(x)|<2,\ 即\ |f(x+1)-f(x)|=1.$$

考虑到对任意正整数 $x\neq y$，$|f(x)-f(y)|>0$，因此 f 为单射. 这就意味着 $f(x+1)-f(x)\equiv 1$ 或 $f(x+1)-f(x)\equiv -1$ *(否则必然出现不同的自变量映射到同一个正整数)*. 考虑到象的集合为 $\mathbb{N}^*$，因此 $f(x+1)-f(x)\equiv 1$，进而可得 $f(n)=f(1)+n-1$，其中 $f(1)\in\mathbb{N}^*$.

11. 求方程 $2^x-5^y\cdot 7^z=1$ 的所有非负整数解 (x,y,z).

解析　$(x,y,z)=(1,0,0),(3,0,1)$.

根据题意，有

$$(-1)^x-(-1)^y\cdot 1^z\equiv 1\pmod 3,$$

因此 x 为奇数且 y 为偶数，设 $x=2m+1$，$y=2n$，其中 $m,n\in\mathbb{N}$. 于是原方程等价于 $2\cdot 4^m-25^n\cdot 7^z=1$.

若 $n\neq 0$，则

$$2\cdot(-1)^m\equiv 1\pmod 5,$$

矛盾，于是 $n=0$. 此时原方程等价于 $2\cdot 4^m-7^z=1$.

(1) 若 $z=0$，则 $m=0$，因此 $(x,y,z)=(1,0,0)$ 为符合题意的一组解.

(2) 若 $z\neq 0$，则

$$-(-1)^z\equiv 1\pmod 4,$$

于是 z 为奇数，设 $z=2p+1$，$p\in\mathbb{N}$，则原方程等价于 $2\cdot 4^m-7\cdot 49^p=1$. 若 $p=0$，则 $m=1$，因此 $(x,y,z)=(3,0,1)$ 为符合题意的一组解. 若 $p\neq 0$，则 $m\geqslant 4$，于是

$$-7\cdot 1^p\equiv 1\pmod{16},$$

矛盾.

综上所述，原方程的所有非负整数解为 $(x,y,z)=(1,0,0),(3,0,1)$.

http://lanqi.org