2016 年中国科学技术大学入学考试试题

兰琦

2017 年 1 月 4 日

1. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ [1]的图象关于直线 $x = -1$ 和直线 $x = 2$ 均对称，则 $f(0)$ 的所有可能取值是________．

解析　$\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}$

根据题意，3 是半周期的整数倍，于是 $\omega = \dfrac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$，因此

$$f(0) = \sin\varphi = \sin(-\omega + \varphi + \omega) = \sin(-\omega + \varphi)\cos\omega + \cos(-\omega + \varphi)\sin\omega = \pm\cos\omega,$$

于是 $f(0)$ 的所有可能取值是 $\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}$．

2. 方程 $x^3 - 2ax + a^2 = 0$ 有在区间 $(0, 1)$ 内的实数解，则 a 的取值范围是________．

解析　$\left(0, \dfrac{32}{27}\right]$

根据题意，有 $a = x\left(1 \pm \sqrt{1-x}\right)\ (x \in (0,1))$，设 $1 - x = (t-1)^2$，$t \in (0,1) \cup (1,2)$，则

$$0 < a = t^2(2-t) = \frac{t \cdot t \cdot (4-2t)}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{32}{27},$$

当 $t = 1$ 时，$a = 1$，经检验 $a = 1$ 时满足条件，结合连续性可得 a 的取值范围是 $\left(0, \dfrac{32}{27}\right]$．

3. 设复数 z 满足 $|z| = 2$，i 是虚数单位，则 $|(1+z) + \mathrm{i}(1-z)|$ 的最大值是________．

解析　设 $z = a + b\mathrm{i}$，则

$$\begin{aligned}|(1+z) + \mathrm{i}(1-z)| &= |(1+a+b) + (1-a+b)\mathrm{i}| \\ &= \sqrt{(1+a+b)^2 + (1-a+b)^2} \\ &= \sqrt{10+4b} \\ &\leqslant 3\sqrt{2},\end{aligned}$$

等号当 $b = 2$，即 $z = 2\mathrm{i}$ 时取得．因此所求的最大值为 $3\sqrt{2}$．

[1] 由题意推测应该有 $\omega \neq 0$ 的条件，否则 $f(0)$ 的取值为 $[-1, 1]$ 上的任意值．

另法　由题意得

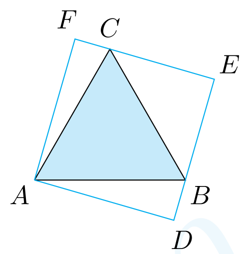
$$\begin{aligned}|(1+z)+\mathrm{i}(1-z)|&=|(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})z|\\&=|1-\mathrm{i}|\cdot|z+\mathrm{i}|=\sqrt{2}\cdot|z+\mathrm{i}|\\&\leqslant\sqrt{2}\cdot(|z|+|\mathrm{i}|)=3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

当 $z=2\mathrm{i}$ 时取到等号.

4. 设边长为 1 的正三角形可被边长为 b 的正方形覆盖，则 b 的最小值是________ .

解析　$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

想象一个大矩形将边长为 1 的正三角形覆盖，然后保持矩形的长和宽的方向不变缩小矩形，直至矩形的边碰到正三角形的三个顶点. 此时必有一个顶点与矩形的顶点重合，如图.



设 $\angle BAD=\alpha$ ，$\angle CAF=\beta$ ，则 $\alpha+\beta=30^\circ$ ，且此方向上的正方形 (由矩形补成) 边长的最小值为

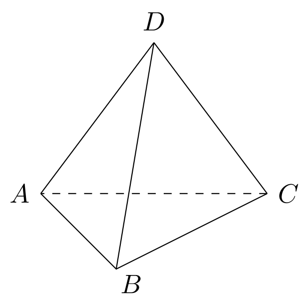
$$\max\{\cos\alpha,\cos\beta\}\geqslant\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

等号当 $\alpha=\beta=15^\circ$ 时取得. 因此所求的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

5. 在四面体 $ABCD$ 中，$AD=BD=CD$ ，$AB=BC=CA=1$. 若二面角 $A-BC-D$ 等于 75° ，则二面角 $A-BD-C$ 的余弦值是________ .

解析　$\dfrac{3\sqrt{3}-2}{8}$

如图.



设 $\angle DAB=\theta$ ，$A-BD-C$ 的大小为 φ ，则根据三面角定理，有

$$\cos\angle ABD=\cos\angle CBA\cdot\cos\angle DBC+\sin\angle CBA\cdot\sin\angle DBC\cdot\cos 75^\circ,$$

即

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cdot\cos 75^\circ,$$

从而 $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{3}\cos 75^\circ$ ，又

$$\cos\angle ABC=\cos\angle ABD\cdot\cos\angle CBD+\sin\angle ABD\cdot\sin\angle CBD\cdot\cos\varphi,$$

即

$$\frac{1}{2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta\cdot\cos\varphi,$$

从而

$$\cos\varphi=\frac{1-2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos^2 75^\circ=\frac{3\sqrt{3}-2}{8}.$$

6. 在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形．动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=0$ ，则 P 的轨迹所围成的平面区域的面积是________ ．

解析　$\dfrac{\pi}{6}$

设 $P(x,y)$ ，$A\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ ，$B\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ ，$C\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则根据题意有

$$\left(-\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)+y^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)(-x)+(-y)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)+(-x)\left(-\frac{1}{2}-x\right)+(-y)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)=0,$$

整理得

$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{6},$$

因此所求面积为 $\dfrac{\pi}{6}$ ．

7. 化简 $\displaystyle\sum_{k=0}^{1008}(-1)^k\mathrm{C}_{2016}^{2k}=$________ ．

解析　2^{1008}

原式即 $(1+\mathrm{i})^{2016}$ 的实部，而

$$(1+\mathrm{i})^{2016}=\left[\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2016}=2^{1008}\left(\cos 504\pi+\mathrm{i}\sin 504\pi\right)=2^{1008},$$

因此原式的值为 2^{1008} ．

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,1)$ ，若 $P(|X|>1)=c$ ，则 $P(X<2)=$________ ．

解析　根据正态分布的对称性，不妨设 $P(X<-1),P(-1<X<0),P(0<X<1),P(1<X<2),P(X>2)$ 分别为 p_1,p_2,p_3,p_3,p_1+p_2 ．又

$$\begin{cases}p_1+p_2+p_3=\dfrac{1}{2},\\ p_1+\dfrac{1}{2}=c,\end{cases}$$

于是 $P(X<2)=\dfrac{1}{2}+p_3=$

9. 设正数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$，求 $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ 的取值范围.

解析　设 $a=\tan\dfrac{A}{2},b=\tan\dfrac{B}{2},c=\tan\dfrac{C}{2}$，其中 $A+B+C=\pi$，$A,B,C>0$，则

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

一方面，有

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{6}=\frac{3}{2},$$

等号当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时取得；另一方面，有

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}>\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}>\sin\frac{A+B+C}{2}=1,$$

当 $(A,B,C)\to(0,0,\pi)$ 时，$\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\to 1$．于是所求的取值范围是 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$．

注　作换元 $a=\dfrac{1}{\tan A},b=\dfrac{1}{\tan B},c=\dfrac{1}{\tan C}$ 亦可.

10. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的右焦点 F 作两条相互垂直的弦 AB,CD，证明：A,B,C,D 四点共圆当且仅当 $|AB|=|CD|$.

解析　我们熟知已知二次曲线上四点 A,B,C,D，若 AB,CD 斜率均存在，则 AB 与 CD 的斜率互为相反数与 A,B,C,D 四点共圆等价．结合椭圆的对称性，原命题成立.

注　考虑非圆二次曲线 $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0\,(\,A\neq B\,)$ 与两条相交直线 $(y-k_1x-b_1)\cdot(y-k_2x-b_2)=0\,(\,k_1\neq k_2\,)$ 形成的交点曲线系

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F-\lambda\cdot(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)=0,$$

当且仅当 $k_1+k_2=0$ 时该方程表示圆，因此引理得证.

11. 袋中共有 $3n$ 个小球，红、绿、蓝各 n 个．现从袋中随机取球，每次取出 3 个小球不放回，直至某种颜色的小球被全部取出，求取球次数 X 的分布列.

解析

12. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$f(a_n)=a_{n-1}$，$n\geqslant 2$．证明：存在正整数 n 使得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k>2016$.

解析　函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$，于是函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．猜测 $a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$，等号当且仅当 $n=1$ 时成立．用数学归纳法证明如下.

当 $n=1$ 时，命题显然成立；

假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $a_k\geqslant\dfrac{1}{k}$，则

$$\mathrm{e}^{a_{k+1}}-\cos a_{k+1}=a_k\geqslant\frac{1}{k}.$$

考虑函数 $h(x)=f(x)-\dfrac{x}{1-x}$ ，$x\in(0,1)$. 我们熟知当 $x\in(0,1)$ 时，有

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2,\mathrm{e}^x<-1+\frac{4}{2-x},$$

于是

$$h(x)<-1+\frac{4}{2-x}-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{x}{1-x}=\frac{x^3(x-3)}{2(2-x)(1-x)}<0.$$

令 $x=\dfrac{1}{k+1}$ ，则有

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{k+1}}-\cos\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}<0,\ \text{即}\ f\left(\frac{1}{k+1}\right)<\mathrm{e}^{a_{k+1}}-\cos a_{k+1},$$

结合 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，有 $a_{k+1}>\dfrac{1}{k+1}$.

综上所述，猜测得证. 于是当 $n\geqslant 2^m$（$m\in\mathbb{N}^*$）时，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}\\&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\\&=\frac{m+2}{2},\end{aligned}$$

因此取 $m=4030$ ，$n=2^{4030}$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k>2016$.