2016 北大全国优秀中学生暑期学堂数学试题

兰琦

2017 年 1 月 4 日

文科生做前 5 题，理科生做后 5 题，每题 20 分.

1. 设关于 x 的方程 $\sin^2 x+\cos x+a=0$ 在实数范围内有解，求实数 a 的取值范围.

   解析　题中方程有解即 $a=-\sin^2 x-\cos x$ 有解，从而有

$$a=\cos^2 x-\cos x-1=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\in\left[-\frac{5}{4},1\right].$$

2. 设 a,b,c 均为正数且 a,b,c 成等差数列，判断 $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 是否成等差数列，并说明理由.

   解析　由题意知 $b-a=c-b=\dfrac{1}{2}(c-a)$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{c-b}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{b-a}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\frac{1}{2}(c-a)}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

   从而得到 $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 是等差数列.

3. 设 a,b,c 为实数，证明：对任意实数 x 都有 $(x-a)^2+(x-b)^2\geqslant c$ 当且仅当 $(a-b)^2\geqslant 2c$.

   解析　对题中不等式整理得

$$2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2-c)\geqslant 0,$$

   此不等式恒成立当且仅当对应判别式

$$\Delta=4(a+b)^2-8(a^2+b^2-c)=4[2c-(a-b)^2]\leqslant 0,$$

   等价于 $2c\leqslant(a-b)^2$，命题得证.

4. 已知复数 z_1,z_2 满足 z_1 与 z_1+z_2 有相同的模且 $\overline{z_1}z_2=a(1-\mathrm{i})$，其中 a 为非零实数，求 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 的值.

   解析　由题意知

$$|z_1|^2=z_1\overline{z_1}=|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}),$$

   化简得

$$z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}=0.$$

因为 $\overline{z_1}z_2=a(1-\mathrm{i})$，所以 $z_1\overline{z_2}=a(1+\mathrm{i})$，代入上面的式子得 $z_2\overline{z_2}=-2a$．于是有

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\overline{z_2}}{z_1\overline{z_2}}=\frac{-2a}{a(1+\mathrm{i})}=-1+\mathrm{i}.$$

5. 一条直线与双曲线交于 A,B 两点，与此双曲线的渐近线交于 C,D 两点，证明：线段 AC 与 BD 的长度相等．

解析　以双曲线的中心为原点，以实轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则双曲线与它的渐近线方程可以表示为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda,$$

其中 $\lambda=1$ 时为双曲线，$\lambda=0$ 时为渐近线．

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$$

两式相减得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0,$$

同样有

$$\frac{(x_3-x_4)(x_3+x_4)}{a^2}-\frac{(y_3-y_4)(y_3+y_4)}{b^2}=0,$$

因为 A,B,C,D 四点共线，当此直线斜率不存在或者斜率为零时，由双曲线的对称性得 $AC=BD$；当此直线的斜率 k 存在且不为零时，有

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_3+y_4}{x_3+x_4}=-\frac{b^2}{a^2k},$$

即 AB 的中点与 CD 的中点在过原点的同一条直线上，所以它们重合，从而有 $AC=BD$．

事实上，此结论可以直接由双曲线的“垂径定理”得到．

6. 设 α,β 均为锐角，满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，求 $\alpha+\beta$ 的值．

解析　显然当 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，等式成立；

由已知条件知

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

整理得

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta).$$

若 $\alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}$，则有 $\sin\alpha-\cos\beta$ 与 $\cos\alpha-\sin\beta$ 同号，若同正，则有

$$\sin\alpha>\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)>\sin\beta,$$

从而有

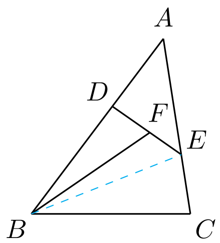
$$\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \alpha > \beta,$$

无解；若同负，用同样的方式也推导矛盾.

综上，$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1，D, E 分别是边 AB, AC 上的点，F 为线段 DE 上的一点，设 $AD : AB = x$，$AE : AC = y$，$DF : DE = z$ 且 $y + z - x = 1$. 求 $\triangle BDF$ 的面积的最大值并求出此时 x, y, z 的值.

解析　如图，连接 BE .



由三角形的面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 可以得到

$$S_{\triangle ADE} = xyS_{\triangle ABC} = xy, S_{\triangle BCE} = (1-y)S_{\triangle ABC} = 1-y,$$

所以有

$$S_{\triangle BDE} = 1 - xy - (1-y) = y(1-x).$$

从而有

$$S_{\triangle BDF} = zS_{\triangle BDE} = zy(1-x) \leqslant \left(\frac{z+y+1-x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

当 $y = z = 1 - x$ 时，即 $x = \frac{1}{3}, y = z = \frac{2}{3}$ 时等号成立，此时 $\triangle BDF$ 的面积有最大值 $\frac{8}{27}$.