2015 年华中科技大学理科实验选拔试题数学部分

兰琦

2017 年 1 月 11 日

一、填空题

1. 对抛物线 $y^2 = 2\sqrt{2}x$，若设其焦点为 F，y 轴正半轴上一点为 N．若准线上存在唯一的点 P 使得 $\angle NPF = 90^\circ$，则 N 点的纵坐标为________．

   解析　2．

   提示：斜边 NF 的中点 M 在抛物线上，坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, 1\right)$．

2. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{255}+\sqrt{256}} =$________．

   解析　15．

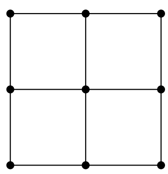
3. 若已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i} - \ln n\right)$ 存在，则 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{i+2}}{i+1} =$________．

   解析　$\ln 2$．

4. 在边长为 1 的正方形中（含边界）取 9 个点，其中必有 3 个点，它们构成的三角形面积不超过________．

   解析　$\dfrac{1}{8}$．

   提示：如图．



5. 某人打靶打中 8 环、9 环、10 环的概率分别为 0.15、0.25、0.2，现他开三枪，不少于 28 环的概率为________．

   解析　0.0935．

二、解答题

6. 若对任意实数 x, y，有 $f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2x\cdot f(y) + y^2$，求 $f(x)$．

   解析　$f(x) = x \lor f(x) = x+1$．

   提示：令 $x = y$ 得
   $$f(0) = (f(x) - x)^2,$$
   再令 $x = 0$ 可得 $f(0) = 0 \lor f(0) = 1$．

7. 求所有 a,b，使 $\left|\sqrt{1-x^2}-ax-b\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ 成立，其中 $x\in[0,1]$.

解析　$a=-1\wedge b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

提示：三角换元，$x=\cos\theta$，其中 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则原式变形为

$$\left|\sqrt{1+a^2}\sin(\theta+\varphi)-b\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

注意到代数式 $\sqrt{1+a^2}\sin(\theta+\varphi)$ 的值域区间长度不能超过 $\sqrt{2}-1$，于是 $a=-1$，进而 $b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

8. 若复数 z 满足 $|z|=1$，求 $\left|z^3-z+2\right|^2$ 的最小值.

解析　$\dfrac{8}{27}$.

提示：利用共轭复数，并令 $x=z+\bar{z}$，则有原式等于 $2x^3-x^2-8x+8$，其中 $x\in[-2,2]$.

9. 已知三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个实根.

(1) 若三个实根为 x_1,x_2,x_3，且 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$，$a,b$ 为常数，求 c 变化时 x_3-x_1 的取值范围；

(2) 若三个实根为 a,b,c，求 a,b,c.

解析　*(1)* $\left[\sqrt{a^2-3b},2\sqrt{\dfrac{a^2}{3}-b}\right]$；

(2) 有理解为 $(a,b,c)=(0,0,0),(1,-1,-1),(1,-2,0)$，无理解为 $\left(-\dfrac{1}{b},b,\dfrac{2}{b}-b\right)$，其中 $b=t+\dfrac{2}{3t}$，而 $t=\sqrt[3]{-1+\sqrt{\dfrac{19}{27}}}$.

注　其中涉及三次方程的解法，可以参考每日一题 *[29]* 一般三次方程的解法. 提示：利用三次方程的韦达定理.