2015 年北京大学自主选拔录取考试

兰琦

2017 年 1 月 11 日

一、选择题（选对得 **10** 分，不选得 **0** 分，选错扣 **5** 分）

1. 整数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx=1$，则 $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ 可能取到的值为（　　）

A. 16900　　B. 17900　　C. 18900　　D. 前三个答案都不对

解析　*A.*

$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=((x+y)(y+z)(z+x))^2$．令 $\begin{cases}x+y=2,\\y+z=5,\\z+x=13,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-3,\\z=8.\end{cases}$

经检验，$\begin{cases}x=5,\\y=-3,\\z=8.\end{cases}$ 满足题意，此时 $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=16900$．

2. 在不超过 99 的正整数中选出 50 个不同的正整数，已知这 50 个数中任两个的和都不等于 99，也不等于 100．这 50 个数的和可能等于（　　）

A. 3524　　B. 3624　　C. 3724　　D. 前三个答案都不对

解析　*D.*

考虑将 $1,2,\cdots,99$ 这 99 个正整数分成如下 50 组：

$$(1,99),(2,98),\cdots,(47,53),(48,52),(49,51),(50).$$

若选出的 50 个不同的正整数中没有 50，则必有 2 个数位于

$$(1,99),(2,98),\cdots,(47,53),(48,52),(49,51)$$

中的同一组，不合题意．所以这 50 个不同的正整数中必有 50，而

$$(1,99),(2,98),\cdots,(47,53),(48,52),(49,51)$$

中，每组有且只有一个数被选中．

因为 $50+49=99$，所以 $(49,51)$ 中选 51；因为 $51+48=99$，所以 $(48,52)$ 中选 52；以此类推，可得 $50,51,52,\cdots,98,99$ 是唯一可能的选法．

经检验，选 $50,51,52,\cdots,98,99$ 满足题意，此时 $50+51+\cdots+98+99=3725$，故选 D.

3. 已知 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，对任意实数 a，函数 $y=\cos^2x-2a\cos x+1$ 的最小值记为 $g(a)$，则当 a 取遍所有实数时，$g(a)$ 的最大值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

令 $t=\cos x\in[0,1]$，令 $h(t)=t^2-2at+1,t\in[0,1]$，则

$$g(a)=\begin{cases}1, & (a<0)\\ 1-a^2, & (0\leqslant a\leqslant 1)\\ 2-2a, & (a>1)\end{cases}$$

故 $g(a)$ 的最大值为 1（$a\leqslant 0$ 时等号成立）.

4. 已知 $10^{20}-2^{20}$ 是 2^n 的整数倍，则正整数 n 的最大值为（　　）

A. 21　　B. 22　　C. 23　　D. 前三个答案都不对

解析　D.

因为

$$10^{20}-2^{20}=2^{20}\left(5^{20}-1\right)=2^{20}\left(5^{10}+1\right)\left(5^5+1\right)(5-1)\left(5^4+5^3+5^2+5+1\right),$$

而 $5^{10}+1$ 模 4 余 2，5^5+1 模 4 余 2，$5^4+5^3+5^2+5+1$ 为奇数，故正整数 n 的最大值为 24.

5. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$BC=4$，$\angle ADC=60^\circ$，$\angle BAD=90^\circ$，四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\dfrac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2}$，则 CD 的长（精确到小数点后 1 位）为（　　）

A. 6.9　　B. 7.1　　C. 7.3　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，直线 AC,BD 的夹角为 θ，则

$$S=\frac{AC\cdot BD\cdot\sin\theta}{2}\leqslant\frac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2}\cdot\sin\theta\leqslant\frac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2},$$

由题意，$S=\dfrac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{2}$，所以 A,B,C,D 四点共圆，且 $AC\perp BD$.

故 $CD=4\sqrt{3}\approx 6.9$，选 A.

二、填空题（填空题共 **5** 小题；请把每小题的正确答案填在横线上，每题 **10** 分）

6. 满足等式 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\dfrac{1}{2015}\right)^{2015}$ 的整数 x 的个数是____.

解析　1.

若 x 为正整数，则 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}>\mathrm{e}>\left(1+\dfrac{1}{2015}\right)^{2015}$.

若 x 为负整数，令 $x=-n(n\in\mathbb{N}_+,n\geqslant 2)$，则 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

因为数列 $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N}_+,n\geqslant 2)$ 关于 n 单调递增，故当且仅当 $x=-2016$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\dfrac{1}{2015}\right)^{2015}$.

7. 已知 $a,b,c,d\in[2,4]$，则 $\dfrac{(ab+cd)^2}{(a^2+d^2)(b^2+c^2)}$ 的最大值与最小值的和为____.

解析　$\dfrac{41}{25}$. 数形结合即可.

8. 已知 $\left|x^2+px+q\right|\leqslant 2$，对于任意的实数 $x\in[1,5]$，则不超过 $\sqrt{p^2+q^2}$ 的最大整数是____.

解析　9.

注意到 $y=x^2+px+q$，$x\in[1,5]$ 满足 $-2\leqslant y\leqslant 2$，因此符合题意的二次函数只有两个:

$$y=x^2-6x+7,y=-x^2+6x-7.$$

9. 设 $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，且 $x+y+z=1$，则 $x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}$ 的值为____.

解析　*1*.

由 $x+y+z=1$，可得

$$\begin{aligned}
&ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3-2abc\\
=&\left(ab^2+a^2b-a^3-b^3\right)+\left(ac^2+bc^2-c^3\right)+\left(a^2c+b^2c-2abc\right)\\
=&-(a+b)(a-b)^2+c^2(a+b-c)+c(a-b)^2\\
=&-(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)\\
=&0,
\end{aligned}$$

所以 $a=b+c$ 或 $b=c+a$ 或 $c=a+b$，故 $x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=1$.

10. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是 9 元集合 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的子集，已知 $|A_i|$ 为奇数，$1\leqslant i\leqslant n$；$|A_i\cap A_j|$ 为偶数，$1\leqslant i\neq j\leqslant n$. 其中 $|A|$ 表示有限集 A 中的元素个数. 则 n 的最大值为____.

解析　9.

我们来证明更一般的结论：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是 m 元集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的子集，已知 $|A_i|$ 为奇数，$1\leqslant i\leqslant n$；$|A_i\cap A_j|$ 为偶数，$1\leqslant i\neq j\leqslant n$. 则 n 的最大值为 m.

事实上，我们可以用 n 个 m 维 01 向量 $\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots,\vec{v_n}$ 分别表示这 n 个子集. 例如，当 $m=9$ 时，子集 $A_1=\{1,3,4,5,9\}$ 可以表示为

$$\vec{v_1}=(1,0,1,1,1,0,0,0,1),$$

下面我们证明这 n 个向量在模 2 的有限域 F_2 上线性无关，从而 $n\leqslant m$.

假设存在一组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}+\cdots+a_n\vec{v_n}=\vec{0},$$

则对于 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，都有

$$0 = \overrightarrow{v_i} \cdot (a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n \overrightarrow{v_n}) = a_i,$$

因此这 n 个向量线性无关.

下面给出 $n = m$ 的构造. 取 $A_i = \{i\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 即可.

证毕.