2015 年北京大学生命科学冬令营试卷数学部分

兰琦

2017 年 1 月 11 日

注意：所有题目均为单项选择题，共 14 小题.

1. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 其图象与 x 轴有 4 个交点，则 $f(x)=0$ 的所有实根之和是 (　　)

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. 4

解析　B.

2. 若 $a+b=2$，则 $\left(a^2-b^2\right)^2-8\left(a^2+b^2\right)$ 的值是 (　　)

A. -16　　B. 0　　C. 6　　D. 8

解析　A.

由题意，

$$\begin{aligned}\left(a^2-b^2\right)^2-8\left(a^2+b^2\right)&=[2(a-b)]^2-8(4-2ab)\\&=4(a+b)^2-32\\&=-16.\end{aligned}$$

3. 方程 $x^2-6x+k=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2，且 $x_1^2x_2^2-x_1-x_2=115$，则 $x_1^2+x_2^2+8$ 的值是 (　　)

A. 66　　B. 32　　C. 60　　D. 80

解析　A.

考虑到一元二次方程有解，舍去 $k=11$，得到 $k=-11$.

4. 当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，二次函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 的最大值是 (　　)

A. -4　　B. -3　　C. 0　　D. 1

解析　C.

$f(x)_{\max}=f(3)=0$.

5. 方程 $x^4-y^4-4x^2+4y^2=0$ 表示的图形是 (　　)

A. 两条平行直线　　B. 两条相交直线

C. 两条平行线与一个圆　　D. 两条相交直线与一个圆

解析　D.

$x^4-y^4-4x^2+4y^2=(x+y)(x-y)\left(x^2+y^2-4\right)=0$.

6. 一个梯形上下底的长度分别为 1 和 4，两条对角线的长度分别为 3 和 4，则梯形面积是 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析　D.

平移一条对角线，将梯形的面积转化为直角三角形的面积.

7. 设 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 a，$t<n$，$x_1,x_2,\cdots,x_t$ 的平均数为 b，$x_{t+1},\cdots,x_n$ 的平均数为 c，则有 (　　)

A. $a=b+c$　　B. $a=\dfrac{b+c}{2}$

C. $a=c+(b-c)\dfrac{t}{n}$　　D. $a=b+(c-b)\dfrac{t}{n}$

解析　C.

由题意，

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=na=tb+(n-t)c,$$

所以 $a=c+(b-c)\dfrac{t}{n}$.

8. 设 $x\in(0,\pi)$，则函数 $f(x)=\left|\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}\right|$ 的取值范围是 (　　)

A. $\left[0,\sqrt{2}\right)$　　B. $[0,2)$　　C. $\left[0,\sqrt{2}\right]$　　D. $[0,2]$

解析　A.

令 $t=\cos x\in(-1,1)$，则

$$g(t)=\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}$$

在 $(-1,1)$ 上单调递增，故 $g(t)\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，所以 $f(x)=|g(t)|\in\left[0,\sqrt{2}\right)$.

也可以考虑 $f(x)=\sqrt{2-2|\sin x|}=\sqrt{2-2\sin x}\in[0,\sqrt{2})$.

9. 外接球的半径为 1 的正四面体的棱长为 (　　)

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{5}{4}$

解析　A.

棱长为 a 的正四面体的外接球半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$，内切球半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$（将正四面体放入正方体中考虑很容易得到这个常用的结论）.

10. 设 $f(x)$ 为实函数，满足 $f(c)=c$ 的实数 c 称为 $f(x)$ 的不动点．设 $f(x)=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$．若 $f(x)$ 恰有两个互不相同的不动点，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $0<a<1$　　B. $1<a<\mathrm{e}$　　C. $1<a<\sqrt{\mathrm{e}}$　　D. $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

解析　D.

题意即 $a^x=x$ 有两个根，两边取对数得 $\ln a=\dfrac{\ln x}{x}$ 有两个不相等的根，考虑函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，求导知 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上单调递增，在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，且当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，有 $g(x)\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$．所以当 $\ln a\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，方程有两个根，对应 $f(x)$ 有两个不动点.

11. 设 C_1,C_2 是平面上两个彼此外切且半径不相等的定圆，动点 C_3 与 C_1,C_2 均外切，则动点 C_3 的圆心轨迹为 (　　)

A. 直线　　B. 圆或椭圆　　C. 抛物线　　D. 双曲线的一支

解析　D.

$|C_3C_1|-|C_3C_2|=r_1-r_2\neq 0$，其中 r_1,r_2 分别表示圆 C_1,C_2 的半径.

12. 考虑三维空间中任意给定的空间四边形 $abcd$，其中 a,b,c,d 为四个顶点，四条直线段 ab,bc,cd,da 顺序首尾相连．在 a 点的内角定义为射线 ad 与射线 ab 所成的角，其补角称为 a 点的外角，其它顶点处类似．考虑这种空间四边形的外角和 X，则有（　　）

A. $X=2\pi$

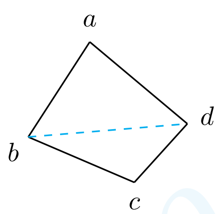
B. $X\geqslant 2\pi$

C. $X\leqslant 2\pi$

D. X 相对于 2π 大小关系不确定，三种可能性都存在

解析　B.

空间四边形的内角和与外角和的和为 4π，先考虑空间四边形的内角和 Y，连结 bd，如图:



我们用三个顶点的字母表示一个角，在 $\triangle abd$ 与 $\triangle bcd$ 中，有

$$\angle dab+\angle abd+\angle adb+\angle cbd+\angle cdb+\angle bcd=2\pi,$$

所以只需要考虑 $\angle abc$ 与 $\angle abd+\angle cbd$ 的大小，以及 $\angle adc$ 与 $\angle adb+\angle cdb$ 的大小关系即可.

由三射线定理知

$$\begin{aligned}\cos\angle abc&=\cos\angle abd\cos\angle cbd+\sin\angle abd\sin\angle cbd\cos\theta\\&\geqslant\cos\angle abd\cos\angle cbd-\sin\angle abd\sin\angle cbd\\&=\cos(\angle abd+\angle cbd),\end{aligned}$$

其中 θ 表示二面角 $a-bd-c$ 的大小.

于是我们得到 $\angle abc\leqslant\angle abd+\angle cbd$，同理有 $\angle adc\leqslant\angle adb+\angle cdb$，所以

$$Y=\angle dab+\angle abc+\angle bcd+\angle cda\leqslant 2\pi,$$

从而 $X\geqslant 2\pi$.

13. 定义函数 $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)+\sin(\alpha-\gamma)\cos(\delta-\beta)$，则此函数 $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 为（　　）

A. $\sin(\delta-\alpha)\cos(\beta-\gamma)$

B. $\sin(\alpha-\delta)\cos(\beta-\gamma)$

C. $\cos(\delta-\alpha)\cos(\beta-\gamma)$

D. $\cos(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)$

解析　没有正确答案.

14. 有 4 副动物拼图，每副一种颜色且各不相同，每副都固定由同一动物的 4 个不同部分（如头、身、尾、腿）组成．现在拼图被打乱后重新拼成了 4 副完整的拼图，但每一副都不是完全同色的，则符合上述条件的不同的打乱方式种数是 (　　)

A. 14400　　B. 13005　　C. 24^3　　D. 63^4

解析　B.

四副拼图的颜色用 $1,2,3,4$ 表示，四个不同的部分用 a,b,c,d 表示，第一行排 a_i，第二行排 b_i，第三行排 d_i，第四行排 d_i，则每一列都是一副完整的画．

考虑先固定第一行，确定后三行的排法即可：

在不考虑限制条件的情况下，总排法有 $(\mathrm{A}_4^4)^3$ 种；减去有一副图（不是只有）完整的情形，有 $\mathrm{C}_4^1(\mathrm{A}_3^3)^3$ 种；再加上有两副图完整的情形，有 $\mathrm{C}_4^2(\mathrm{A}_2^2)^3$；$\cdots$，由容斥原理知不同的打乱方式种数是

$$(\mathrm{A}_4^4)^3-\mathrm{C}_4^1(\mathrm{A}_3^3)^3+\mathrm{C}_4^2(\mathrm{A}_2^2)^3-\mathrm{C}_4^3(\mathrm{A}_1^1)^3+\mathrm{C}_4^4=13005.$$

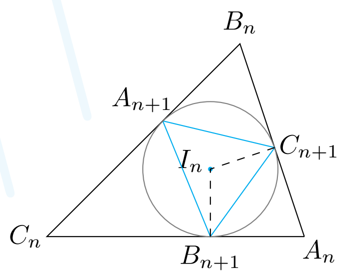
15. 设有三角形 $A_0B_0C_0$，做它的内切圆，三个切点确定一个新的三角形 $A_1B_1C_1$，再做三角形 $A_1B_1C_1$ 的内切圆，三个切点确定三角形 $A_2B_2C_2$，以此类推，一次一次不停地做下去可以得到一个三角形序列，它们的尺寸越来越小，则最终这些三角形的极限情形是 (　　)

A. 等边三角形　　B. 直角三角形

C. 与原三角形 $A_0B_0C_0$ 相似　　D. 以上均不对

解析　A.

内切圆的顶点的对应关系如下图，为了方便，我们直接用 A_n,B_n,C_n 记 $\triangle A_nB_nC_n$ 的三个内角（$n\in\mathbb{N}$）：



则三角形 $A_nB_nC_n$ 的内切圆圆心 I_n 为三角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 的外接圆圆心，于是有

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}\angle B_{n+1}I_nC_{n+1}=\frac{1}{2}(\pi-A_n).$$

于是有

$$A_{n+1}-\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(A_n-\frac{\pi}{3}\right).$$

于是有

$$A_n=\left(A_0-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{\pi}{3},n\in\mathbb{N}.$$

所以当 $n\to+\infty$ 时，有 $A_n\to\frac{\pi}{3}$，同理有 $n\to+\infty$, $B_n\to\frac{\pi}{3}$, $C_n\to\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle A_nB_nC_n$ 的极限情形为等边三角形．

也可以直接由 $2A_{n+1}+A_n=\pi$，得到 $A_{n+1}=\dfrac{B_n+C_n}{2}$，从而得到这些三角形的极限情况是三个内角都相等.