

2015 年北京大学博雅计划数学试卷

兰琦

2017 年 1 月 11 日

一、选择题（共 5 小题；在每小题的四个选项中，只有一项符合题目要求，把正确选项的代号填在括号中，选对得 10 分，选错扣 5 分，不选得 0 分。）

1. 已知 n 为不超过 2015 的正整数且 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ 的个位数为 0，则满足条件的正整数 n 的个数为 ()

A. 1511 B. 1512 C. 1513 D. 前三个答案都不对

解析 B.

n 模 4 余 1,2,3 均可.

2. 在内切圆半径为 1 的直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，内切圆与 BC 切于 D ，则 A 到 D 的距离 AD 等于 ()

A. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ B. $\sqrt{3+3\sqrt{3}}$ C. $\sqrt{3+4\sqrt{3}}$ D. 前三个答案都不对

解析 D.

利用面积确定三边长，答案为 $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

3. 正方形 $ABCD$ 内部一点 P 满足 $AP:BP:CP = 1:2:3$ ，则 $\angle APB$ 等于 ()

A. 120° B. 135° C. 150° D. 前三个答案都不对

解析 B.

4. 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}$ ， $x \leq y$ 的正整数对 (x, y) 的个数为 ()

A. 12 B. 15 C. 18 D. 前三个答案都不对

解析 D.

$(x-2015)(y-2015) = 2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$ ，因此 (x, y) 共有 14 对.

5. 已知 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ，且 $(a-b)(b-c)(c-a) = a+b+c$ ，则 $a+b+c$ 可能为 ()

A. 126 B. 144 C. 162 D. 前三个答案都不对

解析 C.

二、填空题（共 5 小题；请把每小题的正确答案填在横线上，每题 10 分。）

6. 设 α 为复数， $\bar{\alpha}$ 表示 α 的共轭，已知 $|\alpha - \bar{\alpha}| = 2\sqrt{3}$ 且 $\frac{\alpha}{\alpha^2}$ 为纯虚数，则 $|\alpha|$ 的值为_____.

解析 $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

由题意， $\left| r \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right| = \sqrt{3}$ ，其中 r 为 $|\alpha|$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，因此 $r = 2\sqrt{3}$ 或 $r = \sqrt{3}$ ，对应的 $\alpha = 3 + \sqrt{3}i$ 或 $\alpha = \sqrt{3}i$.

7. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条切线与 x, y 轴交于 A, B 两点, 则三角形 AOB 的面积的最小值为_____.

解析 ab .

仿射变换.

8. 已知 $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.

解析 $\frac{1}{2}$.

注意题中方程为两条互相垂直的直线.

9. 已知点集 $M = \{(x, y) \mid \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy\}$, 则平面直角坐标系中区域 M 的面积为_____.

解析 $2 + \frac{\pi}{2}$.

10. 现要登上 10 级台阶, 每次可以登 1 级或 2 级, 则不同的登法共有_____种.

解析 89.

<http://lanqi.org>