2015 年北京大学优秀中学生体验营综合测试数学科目试题

兰琦

2017 年 1 月 11 日

文科做前 5 题，理科做后 5 题，每题 20 分，满分 100 分.

1. 设 $\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$ ，求 $\dfrac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

   解析　$\dfrac{1}{6}$.

2. 已知 D 为三角形 ABC 的边 BC 上的一点，$BD:DC=1:2$ ，$AB:AD:AC=3:k:1$ ，求 k 的取值范围.

   解析　$\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

   利用余弦定理和三角形的三边关系.

3. 已知正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$ ，求 $\dfrac{abc}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ 的最大值.

   解析　$\dfrac{1}{8}$.

   齐次化，有

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c)&=(b+c)(c+a)(a+b)\\&\geqslant 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}\\&=8abc,\end{aligned}$$

   于是所求的最大值为 $\dfrac{1}{8}$.

4. 构造整系数多项式函数 $f(x)$ ，使 $f(\sin 10^\circ)=0$.

   解析　$f(x)=8x^3-6x+1$.

   利用三倍角公式及 $1-2\sin(3\cdot 10^\circ)=0$ 构造.

5. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P 与两焦点 F_1 、F_2 形成的夹角 $\angle F_1PF_2=\alpha$ ，求三角形 F_1PF_2 的面积.

   解析　$b^2\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

6. 已知 $n\in\mathbb{N}^*$ ，求证：$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{5}{3}$.

   解析　由

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{2}}$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}&<1+\frac{1}{2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\\&=\frac{5}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\\&<\frac{5}{3},\end{aligned}$$

故原命题得证.

7. 已知 a,b,c 是三角形的三条边之长，$a^k+b^k=c^k$ ，求证：$k<0\vee k>1$.

解析　记 $f(k)=\left(\frac{a}{c}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k$.

若 c 不为最大边，则由

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k=1$$

得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k<1\wedge\left(\frac{b}{c}\right)^k<1,$$

而 $\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ 至少有一个大于 1 ，因此 $k<0$.

若 c 为最大边，则 $\frac{a}{c},\frac{b}{c}\in(0,1]$. 当 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=1$ 时，等式

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k+\left(\frac{b}{c}\right)^k=2\neq 1,$$

故而 $f(k)$ 为单调递减函数. 又

$$f(1)=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}>1,$$

于是 $k>1$.

综上，原命题得证.