2014 年卓越联盟自主招生试题

兰琦

2017 年 1 月 11 日

一、选择题（原题为选择题）.

1. 不等式 $|x|^3-2x^2+1<0$ 的解集为________.
解析 $\left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},-1\right)\cup\left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp ABC$ ，$AC\perp BC$ ，$AC=2$ ，二面角 $P-BC-A$ 的大小为 60° ，三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ ，则直线 PB 与平面 PAC 所成的角的正弦值为________.
解析 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 当实数 m 变化时，不在任何直线 $2mx+\left(1-m^2\right)y-4m-4=0$ 上的所有点 (x,y) 形成的图形的面积为________.
解析 4π .

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2}, & x<-\dfrac{1}{2},\\ \ln(x+1), & x\geqslant-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 函数 $g(x)=x^2-4x-4$. 设 b 为实数，若存在实数 a ，使 $f(a)+g(b)=0$ ，则 b 的取值范围是________.
解析 $[-1,5]$.

二、填空题.

5. 已知 $0<a<1$ ，分别在区间 $(0,a)$ 和 $(0,4-a)$ 内任取一个数，且取出的两数之和小于 1 的概率为 $\dfrac{3}{16}$ ，则 a 的值为________.
解析 $\dfrac{4}{5}$.

6. 设 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 为平面上夹角为 $\theta(0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$ 的两个单位向量，O 为平面上任意一点，当 $\overrightarrow{OP}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$ 时，定义 (x,y) 为点 P 的斜坐标．现有两个点 A ，B 的斜坐标分别为 (x_1,y_1) ，(x_2,y_2) ，则 A 、B 两点的距离为________.
解析 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta}$.

7. 若函数 $y=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象的对称轴中与 y 轴距离最小的对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{6}$ ，则实数 ω 的值为________.
解析 $\dfrac{3}{2}$.

8. 已知集合 A 、B 满足 $A\cup B=\{1,2,3,\cdots,8\}$ ，$A\cap B=\varnothing$. 若 A 中元素的个数不是 A 中的元素，B 中元素的个数不是 B 中的元素，则满足条件的所有不同的集合 A 的个数为________.

解析　44 .

三、解答题.

9. 设 $\alpha\in\mathcal{R}$, 函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin 2x\cos\alpha+\sqrt{2}\cos 2x\sin\alpha-\sqrt{2}\cos(2x+\alpha)+\cos\alpha, x\in\mathcal{R}$.

(1) 若 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值;

(2) 若 $f(x)=3$, 求 α 与 x 的值.

解析　(1) $2+\cos\alpha$; (2) $\alpha=2k\pi,k\in\mathcal{Z}$; $x=n\pi+\dfrac{3\pi}{8},n\in\mathcal{Z}$.

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的斜率之积为 -3 , 左右两支分别有动点 A 和 B .

(1) 设直线 AB 的斜率为 1 , 经过点 $D(0,5a)$, 且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$, 求实数 λ 的值;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 M , 若直线 AB、MB 分别与 x 轴相交于点 P、Q , O 为坐标原点, 证明: $OP\cdot OQ=a^2$.

解析　(1) $\lambda=\dfrac{2}{7}$; (2) 略.

11. 已知 $f(x)$ 为 $\mathcal{R}$ 上的可导函数, 对任意的 $x_0\in\mathcal{R}$, 有 $0<f'(x+x_0)-f'(x_0)<4x$, $x>0$.

(1) 对任意的 $x_0\in\mathcal{R}$, 证明: $f'(x_0)<\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x}$, $x>0$;

(2) 若 $|f(x)|\leqslant 1$, $x\in\mathcal{R}$, 证明: $|f'(x)|\leqslant 4$, $x\in\mathcal{R}$.

解析　提示 (1) 构造函数 $g(x)=f(x+x_0)-f(x_0)-f'(x_0)x$.

(2) 用反证法.

若存在 $f'(u)>4$, 则由 (1) 知当 $x>u$ 时, 有 $f(x)-f(u)>4(x-u)$, 令 $x=u+1$ 可得矛盾.

类似地, 可以证明 $x>0$ 时, 有

$$\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x}<f'(x+x_0),$$

可从 $f'(u)<-4$ 推出矛盾.

注　已知条件有矛盾之处: 根据条件知 $f'(x)$ 为 $\mathcal{R}$ 上的单调递增函数, 于是 $f'(x)$ 不可能恒为 0 , 假设 $f'(x_0)=t$, $t\neq 0$. 当 $t>0$ 时, 对任意 $x>0$ 有 $f(x+x_0)-f(x_0)>tx$, 于是 $f(x)$ 显然不可能有界; 同理当 $t<0$ 时, 亦有 $f(x)$ 不可能有界.

12. 已知实数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_1|=1$, $|a_{n+1}|=q|a_n|$, $n\in\mathcal{N}^*$, 常数 $q>1$. 对任意的 $n\in\mathcal{N}^*$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n+1}|a_k|\leqslant 4|a_n|$. 设 C 为所有满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 的集合.

(1) 求 q 的值;

(2) 设 $\{a_n\},\{b_n\}\in C$, $m\in\mathcal{N}^*$, 且存在 $n_0\leqslant m$, 使 $a_{n_0}\neq b_{n_0}$. 证明: $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\neq\sum\limits_{k=1}^{m}b_k$;

(3) 设集合 $A_m=\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\,\middle|\,\{a_n\}\in C\right\}$, $m\in\mathcal{N}^*$, 求 A_m 中所有正数之和.

解析　(1) $q=2$; (2) 略; (3) 2^{2m-2} .

提示　(2) 假设 l 是 $1,2,3,\cdots,m$ 中满足 $a_n\neq b_n$ 的最小角标, 则

$$\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{m}b_k\equiv a_{l+1}-b_{l+1}+(a_l-b_l)\equiv\pm 2^l\pm 2^l\pm 2^l\pmod{2^{l+1}}.$$

(3) 显然 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为正数，当且仅当 $a_m > 0$，此时 $a_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 的符号随意．这样的数列共有 2^{m-1} 个．配对求和可得 A_m 中所有元素之和为 $2^{m-1}\cdot 2^{m-1}=2^{2m-2}$．