2014 年华约自主招生试题

兰琦

2017 年 1 月 11 日

1. 5 个正整数，任意 4 个的和构成集合 $\{44,45,46,47\}$，求这 5 个整数.

解析　设这 5 个整数分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，则它们任意 4 个的和(共有 5 个)之和为 $4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ 必为 4 的倍数.

考虑到

$$44\equiv 0\,(\bmod 4)\,,45\equiv 1\,(\bmod 4)\,,46\equiv 2\,(\bmod 4)\,,47\equiv 3\,(\bmod 4)\,,$$

于是这 5 个整数任意 4 个的和为

$$44,45,46,46,47.$$

因此

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{1}{4}(44+45+46+46+47)=57.$$

这 5 个整数分别为

$$57-44,57-45,57-46,57-46,57-47$$

即

$$10,11,11,12,13.$$

2. 甲乙两人采用五局三胜制比赛，单局甲获胜的概率为 p 且 $p>\dfrac{1}{2}$，甲最终获胜的概率为 q，当 p 为何值时 $q-p$ 最大?

解析　根据题意

$$\begin{aligned}q&=\mathrm{C}_2^2p^2\cdot p+\mathrm{C}_3^2p^2(1-p)\cdot p+\mathrm{C}_4^2p^2(1-p)^2\cdot p\\&=p^3+3p^3(1-p)+6p^3(1-p)^2\\&=6p^5-15p^4+10p^3,\end{aligned}$$

于是

$$q-p=6p^5-15p^4+10p^3-p.$$

因此

$$\begin{aligned}\left(6p^5-15p^4+10p^3-p\right)'&=30p^4-60p^3+30p^2-1\\&=30p^2(p-1)^2-1,\end{aligned}$$

由 $p(p-1)=-\sqrt{\frac{1}{30}}$ ，解得

$$p=\frac{1+\sqrt{1-4\sqrt{\frac{1}{30}}}}{2}$$

为使得 $q-p$ 最大的 p 的值.

3. 已知 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2a\sin x+b$ 的最大值为 1 ，最小值为 -4 ，求 a,b 的值.

解析　根据题意

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)-2a\sin x+b\\&=\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2x\right)-2a\sin x+b\\&=-\sin^2x-2a\sin x+b+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

令 $y=f(x)$ ， $t=\sin x$ ， $t\in[-1,1]$ ，则

$$y=-t^2-2at+b+\frac{1}{2},$$

考虑到对称轴为 $t=-a$ ，于是

$$\begin{cases}-a<-1\\ y|_{t=-1}=1\\ y|_{t=1}=-4\end{cases}\vee\begin{cases}-1\leqslant -a<0\\ y|_{t=-a}=1\\ y|_{t=1}=-4\end{cases}\vee\begin{cases}0\leqslant -a\leqslant 1\\ y|_{t=-a}=1\\ y|_{t=-1}=-4\end{cases}\vee\begin{cases}-a>1\\ y|_{t=1}=1\\ y|_{t=-1}=-4\end{cases}$$

解得 $a=\pm\frac{5}{4}$ ， $b=-1$.

4. 已知 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$ ， $g(x)$ 的反函数为 $g^{-1}(x)$.

（1）求证： $f(g(x))$ 的反函数为 $g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$ ；

（2）若 $f(g(x))$ 为奇函数，求证 $g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$ 也为奇函数.

解析　(1) 设 $g(a)=b$ ， $f(b)=c$ ，则

$$f(g(a))=c,a=g^{-1}(b),b=f^{-1}(c),$$

于是 $a=g^{-1}\left(f^{-1}(c)\right)$. 因此 $f(g(x))$ 的反函数为 $g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$.

(2) 用分析法，$g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$ 为奇函数只需要

$$\begin{aligned}&\forall x, g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)+g^{-1}\left(f^{-1}(-x)\right)=0\\ \Leftarrow&\forall x, g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=-g^{-1}\left(f^{-1}(-x)\right)\\ \Leftarrow&\forall x, f\left(g\left(g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right)=f\left(g\left(-g^{-1}\left(f^{-1}(-x)\right)\right)\right)\\ \Leftarrow&\forall x, f\left(g\left(g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right)=-f\left(g\left(g^{-1}\left(f^{-1}(-x)\right)\right)\right)\\ \Leftarrow&\forall x, x=-(-x).\end{aligned}$$

5. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），圆 $x^2+y^2=b^2$，过椭圆上的动点 M 作圆的两条切线，切点分别为 P、Q，直线 PQ 与坐标轴的交点为 E、F，求 $\triangle EOF$ 面积的最小值.

解析　设 $M(a\cos\theta, b\sin\theta)$，则

$$PQ: xa\cos\theta+yb\sin\theta=b^2,$$

即

$$\frac{x}{\dfrac{b^2}{a\cos\theta}}+\frac{y}{\dfrac{b}{\sin\theta}}=1,$$

于是

$$S_{\triangle EOF}=\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a\cos\theta}\cdot\frac{b}{\sin\theta}\right|=\frac{b^3}{a}\cdot\frac{1}{|\sin 2\theta|}\geqslant\frac{b^3}{a},$$

等号当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得，因此 $\triangle EOF$ 面积的最小值为 $\dfrac{b^3}{a}$.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=np^n+qa_n, a_1=0$.

(1) 若 $q=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $|p|<1$，$|q|<1$，求证：数列 $\{a_n\}$ 有界.

解析　(1) 若 $p=1$，则 $a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$；

若 $p\neq 1$，则 $a_n=\dfrac{p-p^n}{(1-p)^2}-\dfrac{(n-1)p^n}{1-p}$.

(2) 由 $a_{n+1}=np^n+qa_n, a_1=0$，得

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}\cdot n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n,$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{1}{q}\left[\left(\frac{p}{q}\right)+2\left(\frac{p}{q}\right)^2+3\left(\frac{p}{q}\right)^3+\cdots+n\left(\frac{p}{q}\right)^n\right],$$

故

$$a_{n+1}=pq^{n-1}+2p^2q^{n-2}+\cdots+np^n.$$

而当 $|p|<1$ 时，数列 $\{np^n\}$ 有界，即存在常数 $M>0$，使得 $|np^n|<M$ 恒成立，所以

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| &\leqslant |p|\cdot|q|^{n-1}+2|p|^2\cdot|q|^{n-2}+\cdots+n|p|^n\\ &< M\left(1+|q|+|q|^2+\cdots+|q|^{n-1}\right)\\ &< \frac{M}{1-|q|},\end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}$ 有界.

7. 求证：当 $x\leqslant n$ 时，$n-n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^x\leqslant x^2$.

解析　法一

令 $f(x)=x^2+n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^x$，则只需要证明当 $x\leqslant n$ 时，$f(x)\geqslant n$. 而

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x+\mathrm{e}^x\left[n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n+n^2\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\\ &=x\left[2-\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right].\end{aligned}$$

情形 1　当 $n=1$ 时，有

$$f(x)=x^2+(1-x)\mathrm{e}^x,$$

于是

$$f'(x)=x(2-\mathrm{e}^x),$$

可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,\ln 2)$ 上单调递增，在 $(\ln 2,1)$ 上单调递减. 因此 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1$，以及 $f(1)=1$，原命题得证.

情形 2　当 $n\geqslant 2$ 时，令 $g(x)=\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$，则

$$g'(x)=\mathrm{e}^x\cdot\frac{1-x}{n}\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2},$$

于是当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\mathrm{e}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

由于 $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<-\dfrac{1}{n}$，因此 $\mathrm{e}<\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. 于是

$$\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{n-1}\leqslant 2,$$

因此

$$2-\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}>0,$$

从而 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=n$，原命题得证.

法二

由于

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)<\frac{x}{n},$$

于是

$$\mathrm{e}^x > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

从而

$$\begin{aligned} n-n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^x &\leqslant n-n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= n-n\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \\ &\leqslant n-n\left(1-\frac{x^2}{n^2}\cdot n\right) \\ &= x^2. \end{aligned}$$

其中倒数第二步用到了伯努利不等式.