2014 年北约自主招生试题

兰琦

2017 年 1 月 11 日

一、填空题.

1. 有一个圆心角是 60° ，面积是 6π 的扇形围成一个圆锥，则圆锥的表面积是________.

   解析　7π .

2. 已知 $f(x)$ 满足 $f\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)=\dfrac{f(a)+2f(b)}{3}$ ，$f(1)=1$ ，$f(4)=7$ ，则 $f(2014)=$________.

   解析　4027 .

3. 10 个人分成 3 人、3 人、4 人三组，共有________ 种不同的分组方法.

   解析　2100 .

4. 已知 $f(x)=\lg\left(x^2-2ax+a\right)$ 的值域为 $\mathcal{R}$ ，则实数 a 的取值范围为________.

   解析　$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

5. 已知 $x<0$ ，$y<0$ ，$x+y=-1$ ，则 $xy+\dfrac{1}{xy}$ 的最________ 值是________.

   解析　小，$\dfrac{17}{4}$.

6. $f(x)=\arctan\dfrac{2+2x}{1-4x}+C$ 在 $\left(-\dfrac14,\dfrac14\right)$ 上为奇函数，则 C 的值是________.

   解析　$-\arctan 2$.

二、解答题

7. 证明：$\tan 3^\circ$ 是无理数.

   解析　用反证法．假设 $\tan 3^\circ$ 是有理数，则 $\tan(k\cdot 3^\circ)$ 均为有理数，于是 $\tan 30^\circ$ 为有理数，矛盾．因此 $\tan 3^\circ$ 是无理数.

8. 已知 $y=f(x)$ ，$y=g(x)$ 都是二次函数，方程 $3f(x)+g(x)=0$ 和方程 $f(x)-g(x)=0$ 都只有一个重根，方程 $f(x)=0$ 有两个不等实根．证明：方程 $g(x)=0$ 没有实数根.

   解析　设函数 $A(x)=3f(x)+g(x)$ ，$B(x)=f(x)-g(x)$ ，则函数 $A(x)$、$B(x)$ 均为二次函数，此时

$$4f(x)=A(x)+B(x).$$

考虑到方程 $f(x)=0$ 有两个不等实根，于是方程 $A(x)+B(x)=0$ 有两个不等实根．因此抛物线 $y=A(x)$ ，$y=B(x)$ 的开口方向必然不同，且零点亦不相同．于是

$$g(x)=\frac{A(x)-3B(x)}{4}$$

必然恒大于 0 或恒小于 0．因此原命题得证．

注　也可以直接设

$$3f(x)+g(x)=a(x-x_1)^2, f(x)-g(x)=b(x-x_2)^2,$$

由已知条件得 $x_1 \neq x_2$，且 $ab<0$，从而得到结论．

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是 13 项的等差数列，集合

$$A=\{a_i+a_j+a_k \mid 1 \leqslant i<j<k \leqslant 13, i, j, k \in \mathbf{N}^*\},$$

则 $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 能否同时在集合 A 中?

解析　容易证明：将集合 A 中的所有数从小到大排列，则可以得到一个与数列 $\{a_n\}$ 的公差相同的等差数列 $\{b_n\}$．设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，不妨设 $d \geqslant 0$．*(i)* 若 $d=0$，则显然不符合题意；*(ii)* 若 $d>0$，则数列 $\{b_n\}$ 中的最小项为 $a_1+a_2+a_3$，最大项为 $a_{11}+a_{12}+a_{13}$．其中至多有

$$(11+12+13)-(1+2+3)+1=31$$

项，且任意两项的差均为公差 d 的整数倍．

不失一般性，将 $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 看作 $0,21,32$（所有的数同时扩大 6 倍即可）．由于 $(21,32)=1$，而 $d \mid 1$，于是 $d \leqslant 1$，因此同时包含 $0,21,32$ 的等差数列至少有 32 项．这与数列 $\{b_n\}$ 中至多有 31 项矛盾，因此 $0, \frac{7}{2}, \frac{16}{3}$ 不能同时在集合 A 中．

注　不考虑扩大所有数，由

$$\frac{7}{2}=md, \frac{16}{3}=nd,$$

也可以得到 $\frac{m}{n}=\frac{21}{32}$，而 $m, n \in \mathbb{Z}$，所以 $n \geqslant 32$．

10. 已知 $x_1 x_2 \cdots x_n=1$，$x_i>0$，$i=1,2, \cdots, n$，求证：

$$\left(\sqrt{2}+x_1\right)\left(\sqrt{2}+x_2\right) \cdots\left(\sqrt{2}+x_n\right) \geqslant(\sqrt{2}+1)^n.$$

解析　法一

直接展开，对应项用均值不等式即可．

法二

当 $n=1$ 时，不等式显然成立．假设命题对不超过 n 的正整数均成立，则命题对 $n+1$：不妨设 $x_1 \geqslant 1$，$x_2 \leqslant 1$，而

$$\left(x_1 x_2\right) x_3 \cdots x_n x_{n+1}=1,$$

于是

$$\left(\sqrt{2}+x_1 x_2\right)\left(\sqrt{2}+x_3\right) \cdots\left(\sqrt{2}+x_{n+1}\right) \geqslant(\sqrt{2}+1)^n.$$

因此只需要证明

$$\frac{\left(\sqrt{2}+x_1\right)\left(\sqrt{2}+x_2\right)}{\sqrt{2}+x_1 x_2} \geqslant \sqrt{2}+1.$$

用分析法：该不等式成立

$$
\begin{aligned}
&\Leftarrow \left(\sqrt{2}+x_1\right)\left(\sqrt{2}+x_2\right) \geqslant \left(\sqrt{2}+x_1x_2\right)\left(\sqrt{2}+1\right) \\
&\Leftarrow 2+\sqrt{2}\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2 \geqslant 2+\sqrt{2}x_1x_2+x_1x_2+\sqrt{2} \\
&\Leftarrow x_1+x_2 \geqslant x_1x_2+1 \\
&\Leftarrow \left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right) \leqslant 0
\end{aligned}
$$