2014 年人大财金学院金融学与数学实验班选拔试题

兰琦

2017 年 1 月 11 日

一、简单计算与证明题（每小题 **10** 分，共 **5** 小题，满分 **50** 分）

1. 在空间直角坐标系中，设 O 是坐标原点，A,B 两点的坐标分别为 (a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)．求 OA 与 OB 夹角的余弦；从 A 向 OB 作垂线交 OB 于点 P，求点 P 的坐标．

   解析　根据已知，有
$$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$
   设点 P 的坐标为 $k(b_1,b_2,b_3)$，由于 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，故
$$\sum_{i=1}^{3}b_i(kb_i-a_i)=0,$$
   解得
$$k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^{3}b_i^2},$$
   故点 P 的坐标为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^{3}b_i^2}(b_1,b_2,b_3)$．

2. 记 n 个元素中取 k 个元素的组合数为 $\dbinom{n}{k}$，利用数学归纳法证明：对 $n\geqslant 1$，$\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}=2^n$．

   解析　略

3. 确定
$$\begin{cases}x+y+z=3\\x^2+y^2+z^2=3\\x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$$
   的实数解．

解析　因为

$$\begin{aligned}9&=(x+y+z)^2\\&=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\&=3+2(xy+yz+zx),\end{aligned}$$

所以

$$xy+yz+zx=3=x^2+y^2+z^2,$$

而

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx,$$

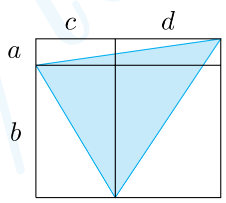
当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立，所以 $x=y=z=1$.

注　条件给多了.

4. 设 a,b,c,d 都是正数，证明：存在三边分别等于 $\sqrt{b^2+c^2}$ ，$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$ ，$\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$ 的三角形，并计算该三角形的面积.

解析　如图，阴影部分即为符合题意的三角形，面积

$$\begin{aligned}S_{\triangle}&=(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}\cdot a\cdot(c+d)-\frac{1}{2}\cdot bc-\frac{1}{2}\cdot d\cdot(a+b)\\&=\frac{1}{2}(ac+bc+bd).\end{aligned}$$



5. 证明方程

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$$

不存在整数解.

解析　若 $m=2k,k\in\mathcal{Z}$ ，则 $m\equiv 0\pmod{16}$. 若 $m=2k+1,k\in\mathcal{Z}$ ，由于

$$\begin{aligned}(2k+1)^4&=16k^4+32k^3+24k^2+8k+1\\&=(16k^4+32k^3+16k^2)+8k(k+1)+1,\end{aligned}$$

所以此时 $m\equiv 1\pmod{16}$. 而

$$1599\equiv 15\pmod{16},$$

故方程 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$ 不存在整数解.

二、解答题（满分 **15** 分）

已知正 n 边形共有 n 条对角线，它的周长等于 p ，所有对角线长度的和等于 q ，求 $\frac{q}{p}-\frac{p}{q}$ 的值.

解析　因为 $\dfrac{n(n-3)}{2}=n$，故 $n=5$．不妨设正五边形的边长为 1，则其对角线长为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$．故 $\dfrac{q}{p}-\dfrac{p}{q}=1$．

三、解答题（满分 **15** 分）

你收到你的信用卡的账单，信用卡的月利率是 1%，要求的每月最低还款额为 20 元．

（1）你决定每月还款 20 元，而且不再使用这一信用卡支付新的付款，你发现你的欠款额总是保持不变．问你收到的账单欠款是多少?

（2）如果你最初收到账单欠款是 2500 元，你希望按月等额还款 p，且不再用信用卡支付新的付款，那么 p 为多大时正好 12 个月还清欠款?

（3）利用（1）（2）求解的启发求解满足 $a_{n+1}=ra_n+b$，$a_0=c$ 的数列 $\{a_n\}$ 的通项．

解析　（1）设收到账单欠款 x 元，则

$$1.01(x-20)=x,$$

故

$$x=2020.$$

（2）设第 k 个月还款 p 元后，剩余欠款为 a_k 元，则

$$\begin{aligned}&a_1=1.01(2500-p),\\&a_{n+1}=1.01(a_n-p)(n=1,2,\cdots,11),\\&a_{12}=0,\end{aligned}$$

故

$$p=a_{11}=1.01(a_{10}-p),$$

故

$$\frac{p}{1.01}+p=a_{10}=1.01(a_9-p),$$

故

$$\begin{aligned}\frac{p}{1.01^2}+\frac{p}{1.01}+p=a_9=1.01(a_8-p),\\ \cdots\cdots,\\ \frac{p}{1.01^{11}}+\frac{p}{1.01^{10}}+\cdots+\frac{p}{1.01}+p=2500,\end{aligned}$$

解得

$$p=\frac{2500\times0.01\times1.01^{11}}{1.01^{12}-1}\approx219.92.$$

（3）略．注意对 r 的不同取值进行分类讨论．

注一　还房贷的时候，一般是从贷款发放的下个月开始还款，所以第一次还的时候就要考虑之前一个月产生的利息了，因此房贷等额本息还款的公式与我这道题中所得到的公式略有差别．

注二　题中式子

$$\frac{p}{1.01^{11}}+\frac{p}{1.01^{10}}+\cdots+\frac{p}{1.01}+p=2500$$

直观理解也是很容易的：第 1 个月还的 p 元都是还的本金，而第 2 个月还的 p 元中只有 $\dfrac{p}{1.01}$ 元还的是本

金，第 3 个月还的 p 元中只有 $\dfrac{p}{1.01^2}$ 元还的是本金，以此类推．第（3）题不需要第（1）题、第（2）题的启发即可求解，这是稍微好一些的高中生都能熟练掌握的基本问题．

四、解答题（满分 **20** 分）

设 $\{a,b\}$，$\{c,d\}$ 分别为两个矩形的长和宽，且 $a<c<d<b$，$ab<cd$．证明：可将第一个矩形放入第二个矩形内部的充要条件是

$$(b^2-a^2)^2 \leqslant (bd-ac)^2+(bc-ad)^2.$$

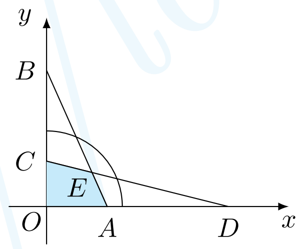
解析　可将第一个矩形放入第二个矩形内部的充要条件是存在 $\theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$\begin{cases} a\sin\theta + b\cos\theta \leqslant c, \\ b\sin\theta + a\cos\theta \leqslant d. \end{cases} \tag{1}$$

设 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，则 *(1)* 式成立的充要条件为存在 $x,y\in(0,1)$，使得

$$\begin{cases} bx+ay \leqslant c, \\ ax+by \leqslant d, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{2}$$

如图，设直线 $\dfrac{x}{c/b}+\dfrac{y}{c/a}=1$ 与直线 $\dfrac{x}{d/a}+\dfrac{y}{d/b}=1$ 与坐标轴的交点分别为 A、B 和 C、D，两条直线的交点为 E，则由两个不等式限制的区域为四边形 $OAEC$．



注意到这两条直线的截距均分居 1 的两侧，因此条件组 *(2)* 有解的充要条件是交点 E 不在圆 $x^2+y^2=1$ 的内部．联立直线方程求得 $E\left(\dfrac{bc-ad}{b^2-a^2},\dfrac{bd-ac}{b^2-a^2}\right)$，于是问题的解为

$$(b^2-a^2)^2 \leqslant (bd-ac)^2+(bc-ad)^2.$$

注　此题为第 37 届 IMO 预选题．